Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ВЕКТОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 17 VIII 1953)

В настоящей заметке рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dq(t)}{dt} = iB(\tau, \varepsilon)q(t) + p(\tau, \varepsilon)e^{i\theta(t, \varepsilon)} \quad (\tau = \varepsilon t), \tag{1}$$

где p и q — векторы гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, а $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$ — линейные операторы в $\mathfrak{H}$. Коэффициенты уравнения (1) специальным образом зависят от t и от некоторого малого параметра ε: они являются функциями аргумента $\tau = \varepsilon t$. К уравнениям такого типа приводятся некоторые задачи с малыми и большими параметрами.

Применяемый нами метод аналогичен методу, применявшемуся в работах ([1-3]) и др. В работе ([3]) рассматривалось однородное уравнение вида (1) ($p \equiv 0$) для случая конечномерного пространства $\mathfrak{H}$, однако без обоснования дифференцируемости некоторых величин, получающихся в процессе решения, производные которых также входят в решение. Затем уравнение (1) рассматривалось С. Г. Крейном и автором ([4]) для случая, когда оператор $B_0 = B(r, 0)$ эрмитов. В настоящей заметке рассматривается общий случай.

1. Пусть имеют место разложения

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(\tau); \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k B_k(\tau); \quad p(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k p_k(\tau). \tag{2}$$

Пусть, далее, производная от числовой функции $\theta(t, \varepsilon)$ по t является функцией переменного τ: $d\theta(t, \varepsilon)/dt = k(\tau)$. Все коэффициенты $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$, $p_k(\tau)$, $k(\tau)$ мы будем считать имеющими достаточное число производных по τ на некотором сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Оператор $A_0(\tau)$ предполагается ограниченным положительным, имеющим ограниченный обратный при $\tau \in [0, L]$.

Рассмотрим оператор $H(\tau) = A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau)$. Множество Π точек трехмерного пространства вида (λ_τ, τ), где λ_τ есть точка спектра оператора $H(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant L)$, назовем полным спектром этого оператора на сегменте $[0, L]$. Частью $\tilde{\Pi}$ полного спектра мы будем называть его подмножество, одновременно открытое и замкнутое. Совокупность $\Pi(\tau)$ первых координат точек из Π с фиксированной второй координатой τ есть спектр оператора $H(\tau)$, а построенное аналогичным образом для $\tilde{\Pi}$ множество $\tilde{\Pi}(\tau)$ — подмножество спектра $\Pi(\tau)$, одновременно открытое и замкнутое. Через $\Gamma(\tau)$ мы всюду будем обозначать спрямляемую замкнутую дугу *, проходящую в комплексной плоскости на

* Или кривую, состоящую из конечного числа таких дуг.

положительном расстоянии от спектра $\Pi(\tau)$, содержащую внутри себя $\tilde{\Pi}(\tau)$ и не содержащую других точек $\Pi(\tau)$. Если одновременно будет рассматриваться несколько частей полного спектра, то дуги $\Gamma(\tau)$ будут снабжаться теми же индексами, что и соответствующие части спектра $\tilde{\Pi}(\tau)$; все дуги будут считаться попарно непересекающимися.

Допустим, что точки кривой $\lambda = k(\tau)$ могут совпадать с точками частей $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2, \ldots, \tilde{\Pi}_n$ полного спектра Π оператора $H(\tau)$ и не могут совпадать с другими точками Π. Обозначим

$$P_j(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_j(\tau)} (H(\tau) - \lambda E)^{-1}\, d\lambda \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Как известно [5], операторы $P_j(\tau)$ обладают свойствами:

$$P_j(\tau)\, H(\tau) = H(\tau)\, P_j(\tau); \quad P_j^2(\tau) = P_j(\tau); \quad P_j(\tau)\, P_k(\tau) = 0 \quad (j \neq k).$$

Обозначим $\tilde{\mathfrak{H}}_i(\tau) = P_j(\tau)\, \mathfrak{H} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$q(t, \varepsilon) = e^{i\theta(t, \varepsilon)} \left(\sum_{j=1}^{n} V_j(\tau, \varepsilon)\, \eta_j(t, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon) \right), \tag{4}$$

где $f \in \mathfrak{H}$, $\eta_j(t, \varepsilon) \in \tilde{\mathfrak{H}}_j(\tau)$; $V_j(\tau, \varepsilon)$ — операторы в $\mathfrak{H}$. Будем считать, что для величин f, V_j имеют место разложения

$$f(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\tau); \quad V_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_{jk}(\tau), \quad V_{j0} = E \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

а векторные функции $\eta_j(t, \varepsilon)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\eta_j(t, \varepsilon)}{dt} = \mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon)\, \eta_j(t, \varepsilon) + b_j(\tau, \varepsilon) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где снова

$$\mathfrak{A}_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathfrak{A}_{jk}(\tau); \quad b_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(\tau). \tag{7}$$

Для определения неизвестных коэффициентов разложений (5), (7) подставляем выражения (4), (6) в уравнение (1) и отделяем коэффициенты при $\eta_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$, пропорциональные ε^m для каждого m. При этом получается бесконечная система рекуррентных соотношений

$$H(\tau)\, V_{jm}(\tau)\, P_j(\tau) - V_{jm}(\tau)\, P_j(\tau)\, H(\tau) = -i\,(\mathfrak{A}_{jm}(\tau) - T_{jm}(\tau))\, P_j(\tau) \tag{8}$$

$$(j = 1, \ldots, n);$$

$$i\,(H(\tau) - k(\tau)\, E)\, f_m(\tau) = \sum_{j=1}^{n} b_{jm}(\tau) - w_m(\tau). \tag{9}$$

В выражения T_{jm} входят величины с меньшими, чем m, номерами и их производные, а в выражение w_m, кроме того, операторы V_{jm}.

2. Уравнения (8) при фиксированном τ имеют вид

$$SX - XS = F, \tag{10}$$

где S, F, X — ограниченные операторы.

Пусть $\tilde{\Pi}_1$ есть какая-нибудь часть спектра Π оператора S и $\tilde{\Pi}_2 = \Pi - \tilde{\Pi}_1$. Положим $P_1 = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} (S - \lambda E)^{-1}\, d\lambda$.

Теорема 1. *При выполнении условий*

$$FP_1 = F, \quad P_1 F = 0 \tag{11}$$

уравнение (10) *имеет решение*

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{(S-\lambda E)^{-1} F (S-\mu E)^{-1}}{\lambda - \mu} \, d\lambda \, d\mu. \tag{12}$$

Это решение — единственное, удовлетворяющее условию $XP_1 = X$, $P_1 X = 0$.

Замечание. Если операторы S и F зависят от параметра τ и при этом все время выполняется условие (11), то, как видно из формулы (12), оператор X имеет столько же производных по τ, сколько их имеют операторы S и F.

Если вернуться к уравнениям (8), то условия (11) сведутся к

$$P_j \mathfrak{A}_{jm} P_j = P_j T_{jm} P_j. \tag{13}$$

При выполнении последних можно с помощью формулы (12) найти операторы $V_{jm} P_j$ и затем положить $V_{jm} = V_{jm} P_j$.

Аналогичным путем решается уравнение (9).

Итак, переходя от $m = 0$ к $m = 1$, далее к $m = 2$ и т. д. и решая для каждого значения m сначала уравнение (8), а затем уравнение (9), мы можем найти величины V_{jm}, $P_j \mathfrak{A}_{jm} P_j$, f_m, b_{jm} с любыми номерами m.

3. При определении операторов $\mathfrak{A}_{jm}$ нужно еще учесть, что они входят в уравнения (6), решения $\eta_j(t, \varepsilon)$ которых при каждом t находятся в соответствующих подпространствах $\tilde{\mathfrak{H}}_j(\tau)$ $(\tau = \varepsilon t)$.

С. Г. Крейном и автором в заметке [6] была установлена теорема:

Теорема 2. *Существует ограниченный оператор* $U_j(\tau)$, *имеющий ограниченный обратный, отображающий подпространство* $\mathfrak{H}_j(0)$ *на* $\tilde{\mathfrak{H}}_j(\tau)$:

$$U_j(\tau) \tilde{\mathfrak{H}}_j(0) = \tilde{\mathfrak{H}}_j(\tau) \quad (\textit{точнее, } P_j(\tau) \tilde{U}_j(\tau) = \tilde{U}_j(\tau) P_j(0)).$$

Оператор $U_j(\tau)$ *обладает непрерывными производными того же порядка, что и оператор* $H(\tau)$.

Используя теорему 2, можно показать, что $\eta_j(t, \varepsilon) \in \tilde{\mathfrak{H}}_j(\tau)$, если выполнены условия

$$\mathfrak{A}_{jk} - P_j \mathfrak{A}_{jk} P_j = \left(\frac{dU_j}{d\tau} U_j^{-1} - P_j \frac{dU_j}{d\tau} U_j^{-1} P_j \right) \delta_{k1}. \tag{14}$$

Более того, при этом после замены $\eta_j = U_j \xi_j$ дифференциальные уравнения (6) сводятся к дифференциальным уравнениям в подпространствах $\tilde{\mathfrak{H}}_j(0)$ и, таким образом, являются уравнениями как бы «низшего порядка» по сравнению с исходным уравнением (1).

Попутно из формул (14) и (13) определяются операторы $\mathfrak{A}_{jk}(\tau)$.

Обозначим через $q^{(m)}(t, \varepsilon)$ вектор, получающийся по формуле (4) вместо вектора $q(t, \varepsilon)$, если в формулах (5), (7) ограничиться членами порядка не выше m относительно ε. Вектор $q^{(m)}$ будем считать пока чисто формально приближением порядка m к решению уравнения (1).

4. Введем обозначения: $A^{(k)}(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{k+1} = A(\tau, \varepsilon) - \sum\limits_{i=0}^{k} \varepsilon^i A_i(\tau)$;

$$B^{(k)}(\tau, \varepsilon) \cdot \varepsilon^{k+1} = B(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i B_i(\tau); \quad p^{(k)}(\tau, \varepsilon) \varepsilon^{k+1} = p(\tau, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i p_i(\tau).$$

Теорема 3. *Пусть оператор* $B_0(\tau)$ *имеет неотрицательную мнимую часть* $(\operatorname{Im}(B_0(\tau) x, x) \geqslant 0)$. *Пусть, далее, при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *величины* $A_i(\tau)$, $B_i(\tau)$, $p_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *обладают на сегменте* $0 \leqslant \tau \leqslant L$

непрерывными производными порядка $m-i+1$, *а* $A^{(m)}$, $B^{(m)}$, $p^{(m)}$ *непрерывны на этом сегменте. Тогда, если векторы* $q(t, \varepsilon)$ *и* $q^{(m)}(t, \varepsilon)$ *взяты при одинаковых начальных условиях, то для некоторых постоянных* c_m *и* ε_1 $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$ *имеет место оценка*

$$\| q(t, \varepsilon) - q^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1} \quad (\varepsilon < \varepsilon_1, \ 0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon).$$

Замечание. Если уравнение однородно, то ход решения упрощается. При этом можно отыскивать общее решение уравнения, а также частные решения, соответствующие частям полного спектра оператора $H(\tau)$.

Оценка при этом оказывается лучшей: $\| q(t, \varepsilon) - q^{(m)}(t, \varepsilon) \| \leqslant c_m \varepsilon^m$. Та же оценка имеет место, если равен нулю не вектор $p(\tau, \varepsilon)$, а только его главная часть $p_0(\tau)$, а также в том случае, когда значения функции $k(\tau)$ не могут совпадать с точками спектра оператора $H(\tau)$.

5. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - Q(x) u + \lambda^2 R(x) = 0$$

на сегменте $[0, l]$ с граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$. Здесь $u(x)$ — вектор гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, а Q, R — операторы в этом пространстве. Такое дифференциальное уравнение может получиться, например, при разделении переменных в уравнении типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x) u.$$

Допустим, что оператор R есть ограниченный положительный оператор, имеющий ограниченный обратный, имеет дискретный спектр и не зависит от x. Оператор $Q(x)$ будем считать непрерывным по x. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула, получающаяся путем применения изложенных выше методов:

$\lambda_{k, n} = \dfrac{n\pi}{l\mu_k} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, где μ_k — собственные числа оператора R.

6. Тем же методом, что и в п. 2, можно найти решения уравнений более общего вида, чем (10). Рассмотрим, например, уравнение

$$\sum_{i, k=0}^{n} a_{ik} S^i X T^k = F, \tag{15}$$

где S, T — произвольные ограниченные операторы.

Теорема 4. *Если многочлен* $\sum\limits_{i, k=0}^{n} a_{ik} \lambda^i \mu^k$ *не обращается в нуль, когда* $\lambda \in \Pi_S$, $\mu \in \Pi_T$, *где* Π_S, Π_T — *спектры операторов* S, T, *то уравнение* (15) *имеет единственное решение при любом ограниченном* F:

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_S} \oint_{\Gamma_T} \frac{(S - \lambda E)^{-1} F (T - \mu E)^{-1}}{\sum a_{ik} \lambda^i \mu^k} \, d\mu \, d\lambda.$$

Если условие теоремы относительно многочлена $\Sigma a_{ik} \lambda^i \mu^k$ не выполняется, то приходится на оператор F накладывать условия такого же типа, как условие (11) для уравнения (10).

Киевский политехнический институт

Поступило
2 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Зап. Ин-та строит. мех. АН УССР (1942). [2] И. З. Штокало, Матем. сборн., 19, 61, в. 1 (1946). [3] С. Ф. Фещенко, Доповіді АН УРСР, 1 (1949). [4] Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, Укр. матем. журн., 2, № 4, 71 (1950). [5] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, 1951. [6] Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, Доповіді АН УРСР, 6, 483 (1950).