Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. В. БАЕВА

ВПОЛНЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 VIII 1953)

Настоящая статья посвящена группам, все подгруппы которых дополняемы в них. Такие группы названы здесь вполне факторизуемыми. Дополняемой в группе $\mathfrak{G}$ автор называет, следуя Холлу ([1]), такую ее подгруппу $\mathfrak{A}$, что в $\mathfrak{G}$ существует хотя бы одна подгруппа $\mathfrak{D}$, удовлетворяющая условиям:

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D} = 1, \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{G}.$$

Группу $\mathfrak{D}$ будем называть в этом случае дополнением подгруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}$.

Вполне факторизуемые группы в конечном случае изучались Холлом ([1]). Он показал, что конечные вполне факторизуемые группы исчерпываются прямыми произведениями конечного числа групп с порядками, не делящимися на квадраты простых чисел, и их подгруппами. В связи с этим С. Н. Черников, руководивший работой автора, высказал гипотезу о совпадении (с точностью до изоморфизма) класса локально нормальных вполне факторизуемых групп, как конечных, так и бесконечных, с совокупностью всех подгрупп прямых произведений конечных групп с порядками, не делящимися на квадраты простых чисел, и поставил перед автором более общую задачу о вложимости произвольных вполне факторизуемых групп в полные прямые произведения конечных групп такого рода.

Решение этой задачи потребовало подробного изучения структуры вполне факторизуемых групп. Ниже приводятся результаты этого изучения.

1. Теорема 1. *Каждая вполне факторизуемая группа двухступенно разрешима, т. е. обладает абелевым коммутантом.*

Следствие 1. *Каждая вполне факторизуемая группа локально конечна.*

Следствие 2. *Вполне факторизуемая p-группа является элементарной абелевой группой.*

Следствие 3. *Всякая вполне факторизуемая группа $\mathfrak{G}$ представима в виде полупрямого произведения двух своих абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$: $\mathfrak{G} = [\mathfrak{A}]\, \mathfrak{D}$ (квадратными скобками отмечена инвариантная из подгрупп, образующих полупрямое произведение).*

Строение вполне факторизуемых групп описывает следующая теорема.

Теорема 2. *Группа $\mathfrak{G}$ в том и только в том случае вполне факторизуема, если она может быть представлена в виде такого полупрямого произведения $[\mathfrak{A}]\, \mathfrak{D}$ двух своих абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$, разлагающихся в прямые произведения циклических групп простых порядков, что все множители хотя бы одного такого разложения группы $\mathfrak{A}$ инвариантны в $\mathfrak{G}$.*

Следствие. *Прямое произведение произвольного множества вполне факторизуемых групп есть группа вполне факторизуемая.*

Примечание 1. Не всякая группа, разлагающаяся в полупрямое произведение двух абелевых вполне факторизуемых подгрупп, вполне факторизуема. Например, некоммутативная группа порядка p^3, все элементы которой, отличные от единицы, имеют порядок p, разлагается в полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^2 и циклической группы порядка p, не являясь, однако, вполне факторизуемой (см. следствие 2 из теоремы 1).

Примечание 2. Не следует думать, что любая циклическая подгруппа группы $\mathfrak{A}$ из теоремы 2 инвариантна в $\mathfrak{G}$. В самом деле, это подтверждается хотя бы таким простым примером. Пусть группа $\mathfrak{G}$ задана образующими элементами P_1, P_2 и Q и определяющими соотношениями

$$P_1^p = 1; \quad P_2^p = 1; \quad Q^q = 1$$

(p и q — различные простые числа и $p \equiv 1 \pmod q$);

$$P_1P_2 = P_2P_1; \quad Q^{-1}P_1Q = P_1^k; \quad k \neq 1; \quad Q^{-1}P_2Q = P_2.$$

Очевидно, группа $\mathfrak{G}$ является полупрямым произведением группы $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2$, где $\mathfrak{P}_1 = \{P_1\}$ и $\mathfrak{P}_2 = \{P_2\}$, и $\mathfrak{Q} = \{Q\}$:

$$\mathfrak{G} = [\mathfrak{P}]\,\mathfrak{Q}.$$

Очевидно вместе с тем, что циклическая подгруппа $\{P_1P_2\}$ группы $\mathfrak{P}$ не инвариантна в группе $\mathfrak{G}$.

Примечание 3. При любом представлении вполне факторизуемой группы $\mathfrak{G}$ в виде полупрямого произведения $\mathfrak{G} = [\mathfrak{A}]\,\mathfrak{D}$ двух ее абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ найдется хотя бы одно разложение группы $\mathfrak{A}$ в прямое произведение инвариантных во всей группе $\mathfrak{G}$ циклических групп простых порядков.

Теорема 2 позволяет довести исследование вполне факторизуемых групп до задания их системой образующих элементов и определяющих соотношений. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Системы символов*

$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots$$

и

$$B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots$$

(где α и β пробегают, соответственно, некоторые множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$), удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{gathered} A_\alpha^{p_\alpha} = 1; \quad B_\beta^{q_\beta} = 1 \quad (p_\alpha \text{ и } q_\beta - \text{простые числа}); \\ A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} = A_{\alpha_2} A_{\alpha_1}, \quad B_{\beta_1} B_{\beta_2} = B_{\beta_2} B_{\beta_1}; \\ \alpha_1, \alpha_2 \subset \mathfrak{M}; \quad \beta_1, \beta_2 \subset \mathfrak{N}; \\ B_\beta^{-1} A_\alpha B_\beta = A_\alpha^{k_{\alpha\beta}}, \quad \text{где} \end{gathered} \tag{1}$$

$$k_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{ если } p_\alpha \not\equiv 1 \pmod{q_\beta}; \\ 1 \text{ или } g^{\frac{p_\alpha - 1}{q_\beta}} \ (g - \text{один из первообразных} \\ \text{корней числа } p_\alpha), \text{ если } p_\alpha \equiv 1 \pmod{q_\beta}, \end{cases}$$

определяют некоторую вполне факторизуемую группу.

Обратно, каждая вполне факторизуемая группа может быть задана системами образующих элементов

$$A_1,\ A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots$$

и

$$B_1,\ B_2, \ldots, B_\beta, \ldots,$$

где α и β пробегают, соответственно, некоторые множества индексов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, и системой определяющих соотношений (1).

2. Непосредственным обобщением теоремы Холла о вложимости конечных вполне факторизуемых групп в конечные прямые произведения групп с порядками, не делящимися на квадраты простых чисел, является теорема 4.

Теорема 4. *Локально нормальная группа тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения конечных групп с неделящимися на квадраты простых чисел порядками.*

В случае произвольных вполне факторизуемых групп вместо обычного прямого произведения таких конечных групп следует рассматривать их полное прямое произведение. Однако соотношение между подгруппами таких произведений и произвольными вполне факторизуемыми группами оказывается более сложным, чем в предыдущей теореме. Дело в том, что в этом случае рассматриваемое произведение имеет непериодические подгруппы, причем и среди периодических подгрупп могут быть подгруппы, не являющиеся вполне факторизуемыми группами.

Для того чтобы выделить среди всех подгрупп полного прямого произведения конечных групп с порядками, не делящимися на квадраты простых чисел, вполне факторизуемые, введем следующие определения.

Пусть

$$\mathfrak{G}'_\alpha = \{A'_\alpha\}, \quad \alpha \subset \mathfrak{M},$$

циклическая группа простого порядка;

$$\mathfrak{G}_\beta = [\mathfrak{A}_\beta]\,\mathfrak{D}_\beta, \quad \beta \subset \mathfrak{N},$$

полупрямое произведение циклической группы $\mathfrak{A}_\beta = \{A_\beta\}$ простого порядка и такого прямого произведения

$$\mathfrak{D}_\beta = \{B_1^{(\beta)}\} \times \{B_2^{(\beta)}\} \times \cdots \times \{B_{k_\beta}^{(\beta)}\}$$

конечного числа циклических групп различных простых порядков что все

$$B_i^{(\beta)} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ k_\beta)$$

неперестановочны с A_β; $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — произвольные множества, хотя бы одно из которых не пусто. Все группы $\mathfrak{G}'_\alpha$ и $\mathfrak{G}_\beta$ являются, таким образом, конечными вполне факторизуемыми группами, порядки которых не делятся на квадраты простых чисел.

Полное прямое произведение $\mathfrak{G}$ групп $\mathfrak{G}'_\alpha$ и $\mathfrak{G}_\beta$ для всех α и β, соответственно, из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем называть F-определенным полным прямым произведением. Элементы группы $\mathfrak{G}$ с единственной отличной от единицы компонентой, равной некоторому A_β из $\mathfrak{G}_\beta$, $\beta \subset \mathfrak{N}$, назовем элементами первой категории. Элементами второй категории назовем все элементы группы $\mathfrak{G}$, у каждого из которых: 1) одна и только одна из компонент в множителях $\mathfrak{G}'_\alpha = \{A'_\alpha\}$, $\alpha \subset \mathfrak{M}$, отлична от единицы и совпадает с выделенным выше образующим элементом соответствующего множителя; 2) компонента в группе $\mathfrak{G}_\beta$ ($\beta \subset \mathfrak{N}$) равна единице, если среди элементов $B_i^{(\beta)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_\beta)$ нет элемента, порядок которого равен порядку элемента A'_α из 1), и равна либо единице, либо некоторой отличной от единицы степени того из элементов $B_i^{(\beta)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_\beta)$, порядок которого совпадает с порядком элемента A'_α из 1), если таковой имеется.

Назовем далее F-системой рассматриваемого F-определенного полного прямого произведения $\mathfrak{G}$ такое множество его элементов, которое состоит из некоторого множества элементов первой категории и некоторого множества элементов второй категории, выбранных так, чтобы они не имели совпадающих компонент вида A'_α. Наконец, группу, порожденную какой-нибудь F-системой из группы $\mathfrak{G}$, назовем F-подгруппой последней.

Теперь может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема 5. *Группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она изоморфна какой-нибудь F-подгруппе некоторого F-определенного полного прямого произведения.*

3. Теоремы 4 и 5 свидетельствуют о важной роли конечных групп с порядками, не делящимися на квадраты простых чисел, в теории вполне факторизуемых групп. Всякая такая группа, как уже отмечалось, вполне факторизуема. Ввиду теоремы 3 она обладает возрастающим нормальным рядом с циклическими факторами простых порядков. Последние не могут повторяться, так как порядок группы не делится на квадраты простых чисел. Поэтому конечные группы с не делящимися на квадраты простых чисел порядками могут быть охарактеризованы как группы, обладающие конечным нормальным рядом с циклическими факторами различных простых порядков. Понятно, что аналогом этих групп в бесконечном случае должны быть группы, обладающие бесконечным возрастающим нормальным рядом с циклическими факторами неповторяющихся простых порядков. Будут ли такие группы вполне факторизуемыми? Ответом на этот вопрос служит следующая теорема.

Теорема 6. *Каждая группа $\mathfrak{G}$, обладающая возрастающим нормальным рядом с циклическими факторами неповторяющихся простых порядков, вполне факторизуема.*

В связи с этой теоремой естественно попытаться заменить в ней предположение о существовании у группы $\mathfrak{G}$ возрастающего нормального ряда более слабым предположением о существовании у нее нормального множества с циклическими факторами неповторяющихся простых порядков. Так как такая группа может быть непериодической, то она не обязана быть вполне факторизуемой. Однако при дополнительном условии локальной конечности группы $\mathfrak{G}$, обеспечивающем ее периодичность, имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Локально конечная группа, обладающая периодическим множеством с циклическими факторами неповторяющихся простых порядков, вполне факторизуема.*

Поступило
27 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ph. Hall, J. London Math. Soc., 12, 201 (1937).