Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

С. С. ВОИТ

ПЕРЕХОД СФЕРИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ИЗ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ В СРЕДУ, ДВИЖУЩУЮСЯ С ДРУГОЙ СКОРОСТЬЮ И ИМЕЮЩУЮ ДРУГИЕ СВОЙСТВА

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 21 VII 1953)

Рассматриваются два полупространства, заполненные жидкостями и разделенные горизонтальной плоскостью $z=0$. Верхняя и нижняя среды характеризуются, соответственно, плотностями ρ_1, ρ_2 и скоростями распространения звука в этих средах c_1, c_2. Обе среды движутся в направлениях, параллельных плоскости $z=0$, верхняя среда со скоростью U_1, направленной вдоль оси x, и нижняя — со скоростью U_2, образующей угол α с этой осью. В точке $z=h$ в верхней среде находится источник гармонических звуковых волн частоты σ; изучается акустическое поле этого источника. Решение частного случая этой задачи было дано автором в статье [1].

Поставленная задача сводится к решению уравнений для потенциалов звуковых волн (множитель $e^{-i\sigma t}$ всюду опущен) в верхней и нижней средах, соответственно:

$$\Delta\varphi_1-\beta_1^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+2ik_1\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+k_1^2\varphi_1=0, \tag{1}$$

$$\Delta\varphi_2-\beta_2^2\cos^2\alpha\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}-\beta_2^2\sin 2\alpha\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}-\beta_2^2\sin^2\alpha\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+$$
$$+2ik_2\beta_2\cos\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+2ik_2\beta_2\sin\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+k_2^2\varphi_2=0 \tag{2}$$

с граничными условиями при $z=0$

$$n\left[k_1\varphi_1+i\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]=m\left[k_2\varphi_2+i\beta_2\cos\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+i\beta_2\sin\alpha\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right], \tag{3}$$

$$n\frac{\partial}{\partial z}\left[k_1\varphi_2+i\beta_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[k_2\varphi_1+i\beta_2\cos\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+i\beta_2\sin\alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right], \tag{4}$$

где введены обозначения:

$$k_j=\frac{\sigma}{c_j},\quad \beta_j=\frac{U_j}{c_j},\quad n=\frac{c_1}{c_2},\quad m=\frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{5}$$

Потенциал в верхней среде будет слагаться из потенциала прямой и отраженной волн, а потенциал нижней среды представляет преломленные волны.

Возьмем потенциал источника (прямой волны) в движущейся среде ([2]) в виде

$$\varphi = \sqrt{1-\beta_1^2}\exp\left[i\frac{k_1}{1-\beta_1^2}(-\beta_1 x + R)\right]\frac{1}{R}, \tag{6}$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2(1-\beta_1^2) + (h-z)^2(1-\beta_1^2)}$.

Пользуясь интегральным представлением источника, получим

$$\varphi = \frac{k_1 \exp\left[-i\frac{k_1\beta_1 x}{1-\beta_1^2}\right]}{2\pi\sqrt{1-\beta_1^2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\frac{ik_1 q}{1-\beta_1^2}\left(x\cos\theta + y\sqrt{1-\beta_1^2}\sin\theta\right) - \frac{k_1(h-z)\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\right] d\theta. \tag{7}$$

Частные решения уравнений (1) и (2) для отраженных и преломленных волн можно взять, соответственно, в виде:

$$\varphi_r = A_1(q,\theta)\exp\left[-\frac{k_1\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}z + \frac{iqk_1}{1-\beta_1^2}\left(x\cos\theta + y\sqrt{1-\beta_1^2}\sin\theta\right)\right], \tag{8}$$

$$\varphi_2 = A_2(q,\theta)\exp\left[\frac{k_1 b}{\sqrt{1-\beta_1^2}}z + \frac{iqk_1}{1-\beta_1^2}\left(x\cos\theta + y\sqrt{1-\beta_1^2}\sin\theta\right)\right], \tag{9}$$

где обозначено:

$$b^2 = \frac{1}{1-\beta_1^2}\left[(\beta_1 - q\cos\theta)^2 + (1-\beta_1^2)q^2\sin^2\theta - C(q,\theta)\right], \tag{10}$$

$$C(q,\theta) = \left[n(1-\beta_1^2) + \beta_2\cos\alpha(\beta_1 - q\cos\theta) - \beta_2\sqrt{1-\beta_1^2}\sin\alpha q\sin\theta\right]^2,$$

а q и θ произвольны так же, как и вид функций $A_n(q,\theta)$. Будем отыскивать потенциалы отраженных и преломленных волн наподобие потенциала прямых волн, интегрируя частные решения (8) и (9) по q и θ.

Окончательный вид функций $A_n(q,\theta)$ определится из граничных условий. После всех вычислений получаем для потенциала отраженных и преломленных волн, соответственно:

$$\varphi_r = \frac{k_1\exp\left[-i\frac{k_1\beta_1 x}{1-\beta_1^2}\right]}{2\pi\sqrt{1-\beta_1^2}}\int_0^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{m\sqrt{q^2-1}\,C(q,\theta) - n^2 bD(q,\theta)}{m\sqrt{q^2-1}\,C(q,\theta) + n^2 bD(q,\theta)} \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{k_1 q}{1-\beta_1^2}\left(x\cos\theta + y\sqrt{1-\beta_1^2}\sin\theta\right) - \frac{k_1\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}(z+h)\right]d\theta, \tag{11}$$

$$\varphi_2 = \frac{k_1\exp\left[-i\frac{k_1\beta_1 x}{1-\beta_1^2}\right]}{\pi\sqrt{1-\beta_1^2}}\int_0^\infty q\,dq\int_{-\pi}^{\pi}\frac{n\sqrt{D(q,\theta)\,C(q,\theta)}}{m\sqrt{q^2-1}\,C(q,\theta) + n^2 bD(q,\theta)} \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{k_1 q}{1-\beta_1^2}\left(x\cos\theta + y\sqrt{1-\beta_1^2}\sin\theta\right) + \frac{k_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\left(zb - h\sqrt{q^2-1}\right)\right]d\theta, \tag{12}$$

где

$$D(q,\theta) = (1-\beta_1 q\cos\theta)^2.$$

Полное выражение потенциала в верхней среде получится при сложении правых частей (7) и (11). Проведем анализ выражения (11) для отраженных волн. Введем систему координат с началом, совпадающим с «мнимым источником», и являющуюся несколько деформированной сферической системой координат; для этого положим

$$\frac{x}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = r\cos\psi\cos\chi; \quad y = r\cos\psi\sin\chi; \quad h+z = r\sin\psi.$$

Потенциал отраженных волн тогда можно записать в виде

$$\varphi_r = B(x)\int\limits_0^\infty dq \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(q,\, \theta)\, e^{irw(q,\,\theta)}\, d\theta, \tag{13}$$

где через $B(x)$ и $F(q, \theta)$ обозначены, соответственно, множитель перед интегралом и подинтегральная функция в выражении (11), а

$$w(q,\, \theta) = \frac{k_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\left[q\cos(\theta-\chi)\cos\psi + \sqrt{1-q^2}\sin\psi\right]. \tag{14}$$

Пользуясь формулой для асимптотической оценки двойных интегралов, как и в ([1]), показывается, что при больших r

$$\varphi_r = -\frac{i}{r}\,\frac{2\pi B(x)}{\sqrt{(w_{qq}\,w_{\theta\theta} - w_{q\theta})_{00}}}\,F(q_0,\, \theta_0)\, e^{irw(q_0,\,\theta_0)} + \frac{1}{r}\,O\left(\frac{1}{r}\right), \tag{15}$$

где $M(q_0, \theta_0)$ — точка внутри области интегрирования, в которой функция $w(q, \theta)$ имеет максимум. Проводя вычисления, получим для точки M координаты $q_0 = \cos\psi$, $\theta_0 = \chi$ и для потенциала отраженных волн асимптотическое значение

$$\varphi_r = \frac{m\sin\psi C(q_0,\theta_0) - n^2 b_0 D(q_0,\theta_0)}{m\sin\psi C(q_0,\theta_0) + n^2 b_0 D(q_0,\theta_0)}\exp\left[ik_1\left(-\frac{\beta_1 x}{1-\beta_1^2} + \frac{r}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)\right]\frac{1}{r}, \tag{16}$$

где b_0 — значение b в точке M.

При $\beta_1 = 0$ получаем из (16) известную формулу ([1]). Если выражение (16) рассмотреть для плоскости $y = 0$, то показательный множитель принимает вид

$$\exp\left[i\,\frac{k_1}{1-\beta_1^2}\left(-\beta_1 x + \sqrt{x^2 + (1-\beta_1^2)(z+h)^2}\right)\right],$$

как будто бы в точке, совпадающей с мнимым источником, находится источник, а вся среда движется ([2]) со скоростью U_1 в направлении оси x. Линии равного потенциала будут, следовательно, сдуваемыми со скоростью U_1 окружностями.

В заключение автор приносит глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Л. Н. Сретенскому, советами которого он пользовался при выполнении настоящей работы.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
15 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Войт, Прикл. матем. и мех., **17**, в. 2, 157 (1953). [2] С. С. Войт, там же, **16**, в. 6, 699 (1952).