Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПОСТНИКОВ

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 23 VII 1953)

Теорема. *Пусть ряд Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s} \quad (\lambda_n \geqslant 0)$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s>0$. *Пусть, далее,*

1. $f(s)=O(1)$ *при* $\operatorname{Re} s>0$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant \Lambda$.

2. $\displaystyle\sum_{|\lambda_n-k|>4} \frac{|b_n|}{(\lambda_n-k)^2}=O(\ln k)$ *и* $\displaystyle\sum_{|\lambda_n-k| \leqslant 4} |b_n|=O(\ln k)$.

Тогда

$$\sum_{\lambda_n \leqslant k} b_n=O(\ln k)$$

(оценка O зависит от Λ).

Частными случаями этой теоремы являются, как легко проверить, следующие утверждения:

1) Если степенной ряд $f(z)=\sum b_n z^n$ сходится при $|z|<1$, $|b_n| \leqslant \Gamma \ln n$, и $f(z)$ ограничена в секторе $|\varphi| \leqslant \Lambda$, то $\displaystyle\sum_{n \leqslant k} b_n=O(\ln k)$.

2) Если ряд Дирихле $f(s)=\sum \frac{b_n}{n^s}$, $s=\sigma+it$, абсолютно сходится при $\sigma>0$, ограничен при $\sigma>0$, $|t| \leqslant \Lambda$, и $|b_n| \leqslant \Gamma / n$, то

$$\sum_{n \leqslant k} b_n=O(\ln \ln k).$$

Действительно, легко проверить, что в этом случае

$$\sum_{|\ln n-k|>4} \frac{1}{n(k-\ln n)^2}=O(1) \quad \text{и} \quad \sum_{|\ln n-k| \leqslant 4} \frac{1}{n}=O(1).$$

Лемма 1. *Пусть* $\sigma>0$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{ilt}}{\sigma+it}\, dt=\left\{\begin{array}{ll} O(1), & l<0 \\ \frac{1}{2}+O(1), & l=0 \\ e^{-l\sigma}+O(1), & l>0 \end{array}\right\} O(1);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{ilt}}{(\sigma+it)^2}\, dt=\begin{cases} O(1), & l \leqslant 0, \\ l e^{-l\sigma}+O(1), & l \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{e^{ilt}}{(\sigma+it)^3}\,dt=\begin{cases}O(1), & l\leqslant 0,\\ \dfrac{l^2}{2}e^{-l\sigma}+O(1), & l\geqslant 0.\end{cases}$$

Первое утверждение леммы — это неравенство (10) книги ([1]), в котором положено $y=e^l$. Вторые два утверждения доказываются совершенно аналогично.

Рассмотрим интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}f(\sigma+it)\,e^{ikt}\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{-\lambda_n\sigma}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}e^{i(k-\lambda_n)t}\,dt.$$

Докажем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}e^{i(k-\lambda_n)t}\,dt=$$

$$=\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{(k-\lambda_n)^2}\right), & \lambda_n-k>4,\\ O(1), & |\lambda_n-k|\leqslant 4,\\ e^{(\lambda_n-k)\sigma}(e^{2\sigma}-2e^{\sigma}\cos\Lambda+1)^2+O\left(\dfrac{1}{(\lambda_n-k)^2}\right), & \lambda_n-k<-4.\end{cases}$$

Если $|\lambda_n-k|\leqslant 4$, то имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}e^{i(k-\lambda_n)t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(\frac{e^{i(k-\lambda_n-4)t}-2\cos\Lambda e^{i(k-\lambda_n-3)t}+(2+4\cos^2\Lambda)e^{i(k-\lambda_n-2)t}}{\sigma+it}+\right.$$

$$\left.+\frac{-2\cos\Lambda e^{i(k-\lambda_n-1)t}+e^{i(k-\lambda_n)}}{\sigma+it}\right)dt=O(1).$$

Если $|\lambda_n-k|>4$, то дважды интегрируем по частям:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}e^{i(k-\lambda_n)t}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{d^2\left(\dfrac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}\right)}{dt^2}e^{i(k-\lambda_n)t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\left\{\frac{16e^{-4it}-18\cos\Lambda e^{-3it}+4(2+4\cos^2\Lambda)e^{-2it}-2\cos\Lambda e^{-it}}{\sigma+it}+\right.$$

$$+\frac{8e^{-4it}-12\cos\Lambda e^{-3it}+4(2+4\cos^2\Lambda)e^{-2it}-4\cos\Lambda e^{-it}}{(\sigma+it)^2}+$$

$$\left.+\frac{2(e^{-4it}-2\cos\Lambda e^{-3it}+(2+4\cos^2\Lambda)e^{-2it}-2\cos\Lambda e^{-it}+1)}{(\sigma+it)^3}\right\}e^{i(k-\lambda_n)}dt.$$

Если $\lambda_n - k > 4$, то оцениваем выражение через $O\left(\frac{1}{(k-\lambda_n)^2}\right)$. Если же $\lambda_n - k < -4$, то числа $k-\lambda_n$, $k-\lambda_n-1$, $k-\lambda_n-2$, $k-\lambda_n-3$, $k-\lambda_n-4$ положительные и после выкладки получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}e^{-i(k-\lambda_n)t}\,dt =$$

$$= e^{(\lambda_n-k)\sigma}(e^{\sigma}-2e^{\sigma}\cos\Lambda+1)^2+O\left(\frac{1}{(\lambda_n-k)^2}\right).$$

Итак, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2}{\sigma+it}f(\sigma+it)\,e^{ikt}\,dt =$$

$$= \sum_{\lambda_n<k-4} b_n e^{-\lambda_n\sigma}e^{(\lambda_n-k)\sigma}(e^{2\sigma}-2e^{\sigma}\cos\Lambda+1)^2+$$

$$+O\left(\sum_{|\lambda_n-k|\leqslant 4}|b_n|e^{-\lambda_n\sigma}\right)+O\left(\sum_{\lambda_n>k+4}\frac{|b_n|e^{-\lambda_n\sigma}}{(\lambda_n-k)^2}\right)=$$

$$=(e^{2\sigma}-2e^{\sigma}\cos\Lambda+1)^2e^{-k\sigma}\sum_{\lambda_n\leqslant k}b_n+O(\ln k)+O(\ln k).$$

Оценим интеграл:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{-it}-e^{-i\Lambda})^2(e^{-it}-e^{i\Lambda})^2}{\sigma+it}f(\sigma+it)\,e^{ikt}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{dt}{|\sigma+it|}=C\ln\left(\frac{\Lambda+\sqrt{\sigma^2+\Lambda^2}}{-\Lambda+\sqrt{\sigma^2+\Lambda^2}}\right)=O\left(\ln\frac{1}{\sigma}\right).$$

Итак:

$$\sum_{\lambda_n\leqslant k}b_n=\frac{O\left(\ln\frac{1}{\sigma}\right)+O(\ln k)}{(e^{2\sigma}-2e^{\sigma}\cos\Lambda+1)^2}e^{k\sigma},$$

$$\sigma=\frac{1}{k},\quad (2-2\cos\Lambda)^2\neq 0,$$

$$\sum_{\lambda_n\leqslant k}b_n=O(\ln k),$$

и теорема доказана. (В случае степенных рядов выкладки можно упростить, если рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{(e^{i\varphi}-e^{i\Lambda})^2(e^{i\varphi}-e^{-i\Lambda})^2}{1-re^{i\varphi}}f(re^{i\varphi})\,e^{-ik\varphi}\,d\varphi\Big).$$

Следствие. Пусть для степенного ряда с единичным радиусом сходимости в секторе $0<r<1$, $|\varphi|\leqslant\lambda$, справедлива оценка:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\frac{1}{1-z}+O(1)$$

и $a_n\geqslant-\gamma\ln n$, $\gamma>0$. Тогда:

$$\sum_{n\leqslant k}a_n=k+O(\ln k).$$

Для доказательства потребуется лемма, представляющая простое обобщение теоремы Хейльбронна и Ландау ([2]).

Лемма 2. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *ограничена в секторе* $|\varphi|\leqslant\Lambda$, $0<r<1$, *и* $b_n\geqslant-\gamma\ln n$. *Тогда* $|b_n|\leqslant\Gamma\ln n$.

При $r<1$

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|\varphi|}{\Lambda}\right)f(re^{i\varphi})\,e^{-in\varphi}\,d\varphi=\sum_{s=0}^{\infty}b_s r^s\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|\varphi|}{\Lambda}\right)e^{i\varphi(s-n)}\,d\varphi=$$

$$=b_n r^n\Lambda+\frac{4}{\Lambda}\sum_{\substack{s=0\\ s\neq n}}^{\infty}b_s r^s\frac{\sin^2\Lambda\frac{s-n}{z}}{(s-n)^2}\geqslant b_n r^n\Lambda-\frac{4\gamma}{\Lambda}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq n}}^{\infty}\frac{\ln s}{(s-n)^2}.$$

В силу ограниченности функции интеграл в левой части есть $O(1)$, $\sum_{\substack{s=1\\ s\neq n}}^{\infty}\frac{\ln s}{(s-n)^2}=O(\ln n)$. Поэтому $b_n=O(\ln n)$.

Если $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\frac{1}{1-z}+O(1)$, то $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=O(1)$ с $b_n=a_n-1$, $b_n\geqslant-\gamma'\ln n$. Значит, по лемме 2 $|b_n|\leqslant\Gamma\ln n$ и по теореме 1

$$\sum_{n\leqslant k}(a_n-1)=O(\ln k),$$

$$\sum_{n\leqslant k}a_n=k+O(\ln k),$$

что и требовалось.

Математический институт
Академии наук СССР

Поступило
22 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, 1936, стр. 98—108. [2] H. Heilbronn, E. Landau, Math. Z., 37, 16 (1933).