Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

С. А. ОРЛОВ

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VII 1953)

Рассмотрим линейное квази-дифференциальное выражение

$$ly = p_n(x)\,y - \frac{d}{dx}\left\{p_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}\left[p_{n-2}(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} - \dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots - \frac{d}{dx}\left(p_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx}\left(p_0(x)\,\frac{d^n y}{dx^n}\right)\right)\dots\right]\right\}, \qquad (1)$$

где $p_0(x),\ p_1(x),\ \dots,\ p_n(x)$ — вещественные измеримые функции в интервале $[0, \infty)$, удовлетворяющие при любом конечном b $(0<b<\infty)$ следующим условиям:

$$\int_0^b |p_0(x)|^{-1}\,dx < \infty; \qquad \int_0^b |p_k(x)|\,dx < \infty \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, n). \qquad (2)$$

Выражение ly известным образом (подробно см. ([1])) определяет замкнутый симметрический оператор L_0 в пространстве $\mathscr{L}_2(0, \infty)$. Как известно, при любом недействительном λ уравнение

$$ly - \lambda y = 0 \qquad (3)$$

имеет решения из $\mathscr{L}_2(0, \infty)$, причем максимальное число m линейно независимых решений из $\mathscr{L}_2(0, \infty)$ не зависит от λ. Пара чисел (m, m) называется индексом дефекта оператора L_0.

В настоящей заметке мы устанавливаем ряд соотношений между решениями уравнения (3), позволяющих с новой точки зрения осветить понятие индекса дефекта.

Кроме того, мы показываем, что для некоторого класса коэффициентов $p_k(x)$ задача об определении числа m сводится к определению числа корней полинома, лежащих в полуплоскости.

1. Если ввести последовательно составляемые квази-производные

$$y^{[0]} = y; \quad y^{[k-1]} = \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}};$$

$$y^{[n]} = p_0(x)\,\frac{d^n y}{dx^n}; \quad y^{[n+k]} = p_k(x)\,\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}\,y^{[n+k-1]} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \qquad (4)$$

то тождество Лагранжа для дифференциального выражения (1) принимает вид:

$$\int_a^b (ly\bar{z} - y\overline{lz})\,dx = [y, z]_b - [y, z]_a,$$

где

$$[y, z]_x = \sum_{k=1}^{n} \left(y^{[k-1]}(x)\, \overline{z}^{[2n-k]}(x) - y^{[2n-k]}(x)\, \overline{z}^{[k-1]}(x)\right).$$

Обозначим через D множество функций $y(x)$, к которым применимо квази-дифференциальное выражение (1) и для которых ly суммируемо вместе со своим квадратом в любом конечном интервале $[0, b]$.

Отнесем каждой функции $y(x) \in D$ вектор-функцию

$$\eta(y; x) = (y(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[n-1]}(x), y^{[2n-1]}(x), y^{[2n-2]}(x), \ldots, y^{[n]}(x)), \quad (5)$$

которую можно мыслить как однострочную матрицу.

Введем матрицу $2n$-го порядка

$$J = \left\| \begin{matrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{matrix} \right\|,$$

где I_n — единичная матрица n-го порядка. В этих обозначениях тождеству Лагранжа можно придать следующий вид:

$$\int_a^b ly\overline{z}\,dx - \int_a^b y\overline{lz}\,dx = i\,(\eta(y; a)\, J\eta^*(z; a) - \eta(y; b)\, J\eta^*(z; b)), \quad (6)$$

где $\eta^*(y; x)$ — матрица, сопряженная матрице $\eta(y; x)$.

Пусть $Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_{2n}(x))$ — вектор-функция, координаты которой $y_k(x) \in D$. Вектор-функции $Y(x)$ отнесем матрицу-функцию $V(Y; x)$, k-я строка которой дает вектор-функцию $\eta(y_k; x)$:

$$V(Y; x) = \| \eta(y_k; x) \|_{k=1}^{2n}.$$

Тождеству Лагранжа можно придать матричный вид:

$$\left\| \int_a^b ly_j\overline{z}_k\,dx \right\| - \left\| \int_a^b y_j\overline{lz}_k\,dx \right\| = i\,[V(Y; a)\,JV^*(Z; a) - V(Y; b)\,JV^*(Z; b)], \quad (7)$$

где $Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_{2n}(x))$; $Z(x) = (z_1(x), \ldots, z_{2n}(x))$.

Пусть $\varphi_j(x; \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ — решения однородного уравнения (3), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\eta(\varphi_j; 0) = l_j \ (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

(l_j — орт $2n$-мерного пространства).

Введем вектор-функцию

$$\Phi(x; \lambda) = (\varphi_1(x; \lambda), \varphi_2(x; \lambda), \ldots, \varphi_{2n}(x; \lambda)). \quad (8)$$

Матрицу $V(\Phi; x)$ обозначим через $T(x; \lambda)$. Очевидно, что $T(0; \lambda) = I_{2n}$.

Из (7) следует тождество для матрицы $T(x; \lambda)$:

$$J - T(b; \lambda)\,JT^*(b; \mu) = \frac{\lambda - \overline{\mu}}{i} \left\| \int_0^b \varphi_j(x; \lambda)\, \overline{\varphi}_k(x; \mu)\,dx \right\|. \quad (9)$$

2. Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_N(x)$ — линейно независимые функции в интервале $[0; \infty)$ с суммируемым квадратом модуля в каждом конечном интервале $0 \leqslant x \leqslant b$ $(0 < b < \infty)$.

Рассмотрим замкнутую линейную оболочку G_N функций $g_1(x), \ldots, g_N(x)$. Справедлива следующая

Лемма 1. *Максимальное число m линейно независимых функций, содержащихся в G_N и принадлежащих $\mathscr{L}_2(0;\ \infty)$, равно рангу матрицы*

$$\Gamma = \lim_{b\to\infty}\left(\left\|\int_0^b g_j(x)\,\overline{g}_k(x)dx\right\|_{jk=1}^{N}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Из леммы 1 и соотношения (9) вытекает

Теорема 1. *При любом λ максимальное число m линейно независимых решений уравнения* (3) *из* $\mathscr{L}_2(0;\ \infty)$ *равно рангу матрицы*

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{b\to\infty}\left(\left\|\int_0^b \varphi_j(x;\ \lambda)\,\overline{\varphi}_k(x;\ \lambda)\,dx\right\|_{j,\,k=1}^{2n}\right)^{-1}. \tag{11}$$

При невещественном λ число m равно рангу матрицы

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{b\to\infty}\frac{\lambda-\overline{\lambda}}{i}\,(J - T(b;\ \lambda)\,JT^*(b;\ \lambda))^{-1}. \tag{12}$$

Первая часть теоремы 1 является континуальным аналогом теоремы 1 ([4]).

Легко устанавливается следующая алгебраическая лемма.

Лемма 2. *Если матрица T удовлетворяет условиям*:

I. $TJT' = J$ (T' — *матрица, транспонированная с матрицей* T);

II. $J - TJT^* > 0\ (< 0)$ ($\|a_{j,\,k}\| > 0$ *означает, что форма* $\sum a_{jk}\xi_j\overline{\xi}_k$ *положительна*),

то $\quad (J - TJT^*)^{-1} - J = \overline{(J - TJT^*)^{-1}} = [(J - TJT^*)^{-1}]' > 0\ (< 0). \quad$ (13)

Обозначим через $\Gamma_b(\lambda)$ следующую матрицу:

$$\Gamma_b(\lambda) = \left\|\int_0^b \varphi_j(x;\ \lambda)\,\varphi_k(x;\ \lambda)\,dx\right\|\frac{i}{\lambda-\overline{\lambda}}(J - T(b;\ \lambda)\,JT^*(b;\ \lambda)). \tag{14}$$

Из леммы 2 и соотношения (9) следует тождество

$$\Gamma_b^{-1}(\lambda) - \Gamma_b^{-1}(\overline{\lambda}) = \frac{\lambda-\overline{\lambda}}{i}\,J \qquad (0 < b < \infty). \tag{15}$$

Устремляя b к ∞, получим соотношение для предельной матрицы $\Gamma(\lambda)$:

$$\Gamma(\lambda) - \Gamma(\overline{\lambda}) = \frac{\lambda-\overline{\lambda}}{i}\,J. \tag{16}$$

Из последнего соотношения следует, что матрица $\Gamma(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ имеет ранг не менее n. Таким образом доказана

Теорема 2. *Максимальное число m линейно независимых решений уравнения* (3) *при невещественном λ удовлетворяет неравенству $n \leqslant m \leqslant 2n$.*

Теорема 2 впервые была установлена И. М. Глазманом ([2]), им также приведены примеры дифференциальных выражений (1), для которых число m принимает любое промежуточное значение. В работе М. А. Наймарка ([3]) устанавливается зависимость числа m от поведения функций $p_k(x)$. В ряде теорем, установленных М. А. Наймарком, число m принимает значение n либо $n+1$. Однако все еще оставался открытым вопрос, насколько широк класс операторов, порождаемых дифференциальным выражением (1) и любым промежуточным индексом дефекта.

3. Пусть функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, кроме условий (2), удовлетворяют следующим условиям:

1. $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ — аналитические функции при $|x| \geqslant x_0 > 0$;

2. $p_0(x) = x^{2n+\nu}\left[a_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu^{(0)} x^{-\mu}\right]$, $a_0 \neq 0$, $\nu \geqslant 0$ (ν — целое число);

$$p_{n-k}(x) = x^{2k+\nu}\left[a_{n-k} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu^{(n-k)} x^{-\mu}\right] \quad (|x| > x_0 > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2'}$$

В этом случае при $x > x_0$ уравнение (3) принимает вид:

$$ly - \lambda y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_{n-k}(x) \frac{d^k y}{dx^k}\right] - \lambda y = 0 \tag{3'}$$

и является уравнением типа Фукса в окрестности точки $x = \infty$.

Поэтому, согласно теореме Фукса, все решения уравнения (3) имеют вид $y(x) = x^{z-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-k}\right)(\ln x)^s$ (s — целое неотрицательное число) либо являются комбинациями таких функций. Но функции такого вида принадлежат $\mathscr{L}_2(x_0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}\, z < 0$.

Теорема 3. *Если функции $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ удовлетворяют условиям* (2) *и* (2'), *то максимальное число m линейно независимых решений уравнения* (3), *принадлежащих $\mathscr{L}_2(0; \infty)$, равно*:

1) *при $\nu > 0$ числу корней полинома*

$$F_{2n}(z, \nu) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_{n-k} \prod_{\mu=0}^{k-1}\left[\left(z + \frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\nu+1}{2} + \mu\right)^2\right] + a_n,$$

лежащих в области $\mathrm{Re}\, z < 0$, *и не зависит от* λ;

2) *при $\nu = 0$ числу корней полинома* $(F_{2n}(z; 0) - \lambda)$, *лежащих в области* $\mathrm{Re}\, z < 0$, *и при невещественном λ равно n.*

При этом в случае $\nu > 0$ спектр оператора дискретный.

Замечание. Так как при произвольных вещественных постоянных $a_0, a_1, \ldots, a_n$ полином $F_{2n}(z; \nu)$ есть произвольный полином с вещественными коэффициентами степени n относительно $\left(z + \frac{\nu}{2}\right)^2$, то число m корней полинома $F_{2n}(z; \nu)$, лежащих в левой полуплоскости, может быть за счет выбора постоянных $a_0, a_1, \ldots, a_n$ сделано любым числом, удовлетворяющим неравенству $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Результаты, излагаемые в этой заметке, нами использованы для эффективного построения резольвент и спектральных матриц-функций всех самосопряженных расширений оператора L_0. Этому вопросу мы посвятим особую статью.

Поступило
23 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов, М., 1950. [2] И. М. Глазман, Усп. матем. наук, **5**, вып. 6 (40) (1950). [3] М. А. Наймарк, ДАН, **72**, № 4 (1952). [4] М. Г. Крейн, ДАН, **69**, № 2 (1949).