Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

РАЗЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТИ ОТ ФУНКЦИИ ПО РАЗНОСТЯМ ОТ ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VII 1953)

Настоящее исследование предпринято с целю конструирования разложений разностей от функции по разностям от ее производной. Мы изложим в общих чертах метод конструирования таких разложений и рассмотрим связанные с ним приложения.

Рассмотрим конечную разность

$$\Delta^n f(a+\lambda h)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}f[a+(\lambda+\nu)h],$$

где λ — произвольное целое положительное или отрицательное число. Используя интерполяционную формулу, сконструированную в работе автора (см. ([1]), стр. 23, формула (2)), получим:

$$\Delta^n f(a+\lambda h)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda+\nu)^k\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)+$$
$$+\frac{h^n}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\int_0^{\lambda+\nu}(\lambda+\nu-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)\,dt.$$

Полагая $f(x)\equiv 1,\ x,\ \ldots,\ x^{n-1}$, мы убеждаемся, что

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\lambda+\nu)^k=0\quad(k=0,1,\ldots,n-1).$$

Поэтому

$$\Delta^n f(a+\lambda h)=\frac{h^n}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\int_0^{\lambda+\nu}(\lambda+\nu-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)\,dt. \quad (1)$$

Разложив $f^{(n)}(a+th)$ по нисходящим разностям $\Delta^\rho f^{(n)}(a)$, приходим к формуле:

$$\Delta^n f(a+\lambda h)=h^n\sum_{\rho=0}^{r}A_{n,\rho}\Delta^\rho f^{(n)}(a)+R_{n,r}, \quad (2)$$

где

$$A_{n,\rho}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\int_0^{\lambda+\nu}(\lambda+\nu-t)^{n-1}\binom{t}{\rho}dt, \quad (3)$$

$$R_{n,\,r}=\frac{h^{n+r+1}}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\lambda+\nu}(\lambda+\nu-t)^{n-1}\binom{t}{r+1}f^{(n+r+1)}(a+\vartheta_\nu h)\,dt.$$

Ниже приводится несколько первых коэффициентов формулы (2) для $\lambda=0$, $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ и $\rho=0,\ 1,\ldots,\ 7$.

$n \backslash \rho$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$	$\frac{275}{24192}$
2	1	1	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{221}{60480}$	$\frac{19}{6048}$
3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{480}$	$\frac{1}{945}$	$-\frac{11}{20160}$
4	1	2	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{720}$	0	$\frac{1}{3024}$	$-\frac{1}{3024}$

Рассуждая как выше, мы получим разложение $\Delta^n f[a-(n-\lambda)h]$ по восходящим разностям $\nabla^\rho f^{(n)}(a)=\Delta^\rho f^{(n)}(a-\rho h)$. Положив $\lambda=0$, найдем

$$\nabla^n f(a)=h^n\sum_{\rho=0}^{r}(-1)^\rho A_{n,\,\rho}\nabla^\rho f^{(n)}(a)+R_{n,\,r},\tag{4}$$

в которой коэффициенты $A_{n,\,\rho}$ даются формулой (3) при $\lambda=0$. Таким образом, числовые значения нескольких первых коэффиццентов формулы (4) могут быть найдены при помощи приведенной выше таблицы.

Хотя мы часто имеем разложения с восходящими или нисходящими разностями, но все же такие разложения являются весьма специальными. Сейчас мы изучим другие разложения, содержащие центральные разности. Хотя они и могут быть выведены из формулы (1), однако полезно обратиться и приводимому ниже приему конструирования формул с центральными разностями, ибо вычисление коэффициентов значительно упрощается при этом приеме.

Рассмотрим конечную разность

$$\Delta^{2n-1}f[a-(n-1)h]=\delta^{2n-1}f\left(a+\frac{h}{2}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n+\nu}\binom{2n-1}{n-\nu-1}\left\{f\left(a+\frac{h}{2}-\frac{2\nu+1}{2}h\right)-f\left(a+\frac{h}{2}+\frac{2\nu+1}{2}h\right)\right\}.$$

В этом случае

$$\delta^{2n-1}f\left(a+\frac{h}{2}\right)=\frac{h^{2n-1}}{(2n-2)!}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n+\nu+1}\binom{2n-1}{n-\nu-1}\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\nu+\frac{1}{2}-t\right)^{2n-2}\left\{f^{(2n-1)}\left(a+\frac{h}{2}+th\right)+f^{(2n+1)}\left(a+\frac{h}{2}-th\right)\right\}dt.$$

Используя интерполяционную формулу Бесселя, находим окончательно формулу:

$$\delta^{2n-1} f\left(a+\frac{h}{2}\right)=h^{2n-1} \sum_{\rho=1}^{r} B_{n,\rho} \mu \delta^{2\rho-2} f^{(2n-1)}\left(a+\frac{h}{2}\right)+R_{n,r}, \qquad (5)$$

где

$$B_{n,1}=1, \quad B_{n,\rho}=\frac{2}{(2n-2)!\,(2\rho-2)!} \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n+\nu+1}\binom{2n-1}{n-\nu-1} \times$$

$$\times \int_{0}^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\nu+\frac{1}{2}-t\right)^{2n-2}\left(t^{2}-\frac{1}{4}\right) \cdots\left[t^{2}-\left(\rho-\frac{3}{2}\right)^{2}\right] dt \qquad (2 \leqslant \rho \leqslant r);$$

$$R_{n,r}=\frac{2h^{2n+2r-1}}{(2n-2)!\,(2r)!} \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{n+\nu+1}\binom{2n-1}{n-\nu+1} \times$$

$$\times \int_{0}^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\nu+\frac{1}{2}-t\right)^{2n-2}\left(t^{2}-\frac{1}{4}\right) \cdots\left[t^{2}-\left(r-\frac{1}{2}\right)^{2}\right] f^{(2n+2r-1)}\left(\xi_{\nu}\right) dt.$$

Для разложения разности

$$\Delta^{2n} f(a-nh)=\delta^{2n} f(a)$$

по центральным разностям от $f^{(2n)}(a)$ обратимся к выражению:

$$\delta^{2n} f(a)=\frac{h^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{n-\nu} \times$$

$$\times \int_{0}^{\nu}(\nu-t)^{2n-1}\left\{f^{(2n)}(a+th)+f^{(2n)}(a-th)\right\} dt.$$

Используя интерполяционную формулу Стирлинга, находим:

$$\delta^{2n} f(a)=h^{2n} \sum_{\rho=0}^{r} S_{n,\rho}\, \delta^{2\rho} f^{(2n)}(a)+R_{n,r}, \qquad (6)$$

где

$$S_{n,0}=1, \quad S_{n,\rho}=\frac{2}{(2n-1)!\,(2\rho)!} \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{n-\nu} \times$$

$$\times \int_{0}^{\nu}(\nu-t)^{2n-1} t^{2}\left(t^{2}-1\right) \ldots\left[t^{2}-(\rho-1)^{2}\right] dt \qquad (1 \leqslant \rho \leqslant r);$$

$$R_{n,r}=\frac{2h^{2n+2r+2}}{(2n-1)!\,(2r+2)!} \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{2n}{n-\nu} \times$$

$$\times \int_{0}^{\nu}(\nu-t)^{2n-1} t^{2}\left(t^{2}-1\right) \ldots\left(t^{2}-r^{2}\right) f^{(2n+2r+2)}\left(\xi_{\nu}\right) dt.$$

Для дальнейшего понадобится таблица сумм и разностей от $f_m^{(n)} \equiv f^{(n)}(a+mh)$, аналогичная таблице, приведенной на стр. 87 работы автора ([1]). Начальные суммы $\sum$, $\sum^2, \ldots, \sum^n$ мы будем считать произвольными. Вернемся к формуле (4). Перепишем ее для точки

$a+(m-n)h$. Дадим m значения 1, 2, ... и просуммируем полученные выражения. Суммы разностей одного и того же столбца заменим разностями между первым и последним числами предыдущего столбца. Выделим сумму слагаемых, не зависящих от переменной суммирования m, и приравняем ее нулю. Это возможно, поскольку начальная сумма $\sum$, фигурирующая в выделенной сумме, произвольна. В конечном счете получим формулу для $\Delta^{n-1} f_{m-n+1}$ с членами, зависящими от m. Мы можем теперь положить опять $m=1, 2, \ldots$, просуммировать полученные выражения, заменить суммы разностей одного и того же столбца разностями между первым и последним числами предыдущего и распорядиться суммой членов, не зависящих от m, так, чтобы она исчезла, а затем повторить вышеизложенный прием для $\Delta^{n-2} f_{m-n+2}$ и т. д. Отбрасывая остаточные члены, мы придем в конце концов к формуле:

$$f_m = h^n \Big\{ \sum\nolimits^n f_{m+n}^{(n)} - A_{n,1} \sum\nolimits^{n-1} f_{m+n-1}^{(n)} + \ldots + (-1)^n A_{n,n} f_m^{(n)} + \\ + \sum_{\rho=n+1}^{r} (-1)^\rho A_{n,\rho} \Delta^{\rho-n} f_{m+n-\rho}^{(n)} \Big\},$$

которая может быть использована для численного интегрирования дифференциальных уравнений. Начальные суммы $\sum$, $\sum^2, \ldots, \sum^n$ могут быть определены из полученных выше уравнений с левыми частями, не зависящими от m. Величины $\sum^n f_n^{(n)}$, $\sum^{n-1} f_{n-1}^{(n)}, \ldots, \sum f_1^{(n)}, f_0^{(n)}$, $\Delta f_{-1}^{(n)}, \Delta^2 f_{-2}^{(n)}, \ldots$ расположены в восходящем порядке на одной и той же диагонали.

Используя формулы (5) и (6) без остаточных членов, мы убеждаемся, что

$$f_m = h^{2n-1} \Big\{ \frac{1}{2} \Big(\sum\nolimits^{2n-1} f_{m+n-1}^{(2n-1)} + \sum\nolimits^{2n-1} f_{m+n}^{(2n-1)} \Big) + \\ + \frac{1}{2} B_{n,2} \Big(\sum\nolimits^{2n-1} f_{m+n-2}^{(2n-1)} + \sum\nolimits^{2n-3} f_{m+n-1}^{(2n-1)} \Big) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{2} B_{n,n} \Big(\sum f_m^{(2n-1)} + \sum f_{m+1}^{(2n-1)} \Big) + \sum_{\rho=n+1}^{r} B_{n,\rho} \mu \delta^{2\rho-2n-1} f_m^{(2n-1)} \Big\},$$

$$f_m = h^{2n} \Big\{ \sum\nolimits^{2n} f_{m+n}^{(2n)} + S_{n,1} \sum\nolimits^{2n-2} f_{m+n-1}^{(2n)} + \ldots \\ \ldots + S_{n,n} f_m^{(2n)} + \sum_{\rho=n+1}^{r} S_{n,\rho} \delta^{2\rho-2n} f_m^{(2n)} \Big\}.$$

Полагая в последних формулах $n=1$, 2, 3 и $r=5$ и 4, мы получим, в частности, формулы, принадлежащие М. Ф. Субботину ([2]), которые спустя 20 лет после появления статьи М. Ф. Субботина ([2]) были заново выведены Бикли ([3]) символическим методом.

Математический институт
Академии наук Груз.ССР

Поступило
19 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. Микеладзе, Усп. матем. наук, 3, 6 (1948). [2] М. Ф. Субботин, Бюлл. Среднеаз. гос. ун-та, № 16, 273 (1942); № 17, 1 (1928). [3] W. G. Bickley, J. Math. and Phys. (Mass.), 27, 3, 191 (1948).