Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Я. ЛЮБОВ

РАСЧЕТ СКОРОСТИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛИТКА С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕТАЛЛА

(Представлено академиком И. П. Бардиным 1 VIII 1953)

При расчете скорости продвижения фронта кристаллизации в процессе затвердевания металлического слитка обычно принимается, что теплопроводность λ и теплоемкость c твердого металла не зависят от температуры [1]. В расчете фигурируют средние значения теплофизических параметров веществ $\bar{\lambda}$ и $\bar{c}$ в данном интервале температур. По мере увеличения последнего истинные значения λ и c могут при некоторых температурах T существенно отличаться от $\bar{\lambda}$ и $\bar{c}$. Ошибка, вносимая этим обстоятельством в результат расчета, остается неопределенной, и поэтому законность применения $\bar{\lambda}$ и $\bar{c}$ вместо истинных значений теплофизических параметров металла — сомнительной. Для решения вопроса о возможности расчета с достаточной точностью скорости затвердевания металла, ограничиваясь $\bar{\lambda}$ и $\bar{c}$, необходимо иметь более точный метод, позволяющий учесть температурную зависимость λ и c.

В настоящей работе делается попытка развития такого метода, применимого при различных зависимостях λ и c от T. Для определенности примем

$$\lambda = \lambda_0 + \mu T, \quad c = c_0 + \omega T. \tag{1}$$

Связь между λ, c и T, соответствующая формулам (1), имеет место для многих металлов и сплавов в широком интервале температур. Для большинства металлов $\mu < 0$, $\omega > 0$.

Будем считать, что перегрев расплава отсутствует и температура металла зависит только от расстояния от поверхности слитка и времени t [2]. Уравнение, описывающее изменение температуры в затвердевшей корочке металла, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda_0 + \mu T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] = \gamma\,(c_0 + \omega T)\frac{\partial T}{\partial t}\,; \tag{2}$$

γ — плотность металла;

$$T(x,\ 0) = T_{\text{кр}} \quad \text{при} \quad x > 0; \tag{3}$$

$T_{\text{кр}}$ — температура кристаллизации металла.

Если на поверхности слитка, в процессе кристаллизации сохраняется постоянная температура, то

$$T(0,\ t) = T_0 \quad \text{при} \quad t > 0; \tag{4}$$

T_0 — температура поверхности слитка.

На фронте кристаллизации $x = y(t)$, где $y(t)$ — координата фронта кристаллизации, увеличивающаяся с течением времени,

$$T[y(t),\ t] = T_{\text{кр}}. \tag{5}$$

Из условия теплового баланса на границе расплав — жидкая фаза получаем

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\lambda_0 + \mu T_{\text{кр}}}{Q\gamma}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=y(t)}; \tag{6}$$

Q — теплота кристаллизации на 1 г.

Введем величины:

$$\overline{\lambda} = \lambda_0 + \mu\frac{T_{\text{кр}} + T_0}{2}; \quad \overline{c} = c_0 + \omega\frac{T_{\text{кр}} + T_0}{2};$$

$$\Theta = \frac{2}{T_{\text{кр}} - T_0}\left(T - \frac{T_0 + T_{\text{кр}}}{2}\right); \tag{7}$$

$$\overline{a} = \frac{\lambda}{\gamma c}; \quad \alpha_1 = \frac{\mu(T_{\text{кр}} - T_0)}{2\overline{\lambda}}; \quad \alpha_2 = \frac{\omega(T_{\text{кр}} - T_0)}{2\overline{c}}; \quad q = \frac{2Q}{\overline{c}(T_{\text{кр}} - T_0)}.$$

Условия нашей задачи могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1 + \alpha_1\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right] = \frac{1}{\overline{a}}(1 + \alpha_2\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial t}; \quad \Theta(0,\ t) = -1;$$

$$\Theta[y(t),\ t] = 1; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\overline{a}}{q}(1 + \alpha_1)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_{x=y(t)}. \tag{8}$$

Будем искать

$$\Theta(x,\ t) \equiv \Theta(u); \quad u = \frac{x}{\sqrt{2\overline{a}t}}; \quad y(t) = \beta\sqrt{2\overline{a}t}, \tag{9}$$

где β — неизвестная постоянная.

Отсюда

$$\frac{d}{du}\left[(1 + \alpha_1\Theta)\frac{d\Theta}{du}\right] + u(1 + \alpha_2\Theta)\frac{d\Theta}{du} = 0; \tag{10}$$

$$\Theta(0) = -1; \tag{11}$$

$$\Theta(\beta) = 1; \tag{12}$$

$$\beta = \frac{1 + \alpha_1}{q}\left(\frac{d\Theta}{du}\right)_{u=\beta}. \tag{13}$$

Случай $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ соответствует принятию средних значений для λ и c во всем интервале температур от $T_{\text{кр}}$ до T_0. При этом

$$\frac{d^2\Theta}{du^2} + u\frac{d\Theta}{du} = 0; \tag{14}$$

$$\Theta(0) = -1; \tag{15}$$

$$\Theta(\overline{\beta}) = 1; \tag{16}$$

$$\left(\frac{d\Theta}{du}\right)_{u=\overline{\beta}} = \overline{\beta}q; \tag{17}$$

$\overline{\beta}$ — значение β, вычисленное из средних значений λ и c.

Решение уравнения (14) при условиях (15) и (16) имеет вид

$$\Theta = \frac{2\operatorname{erf}(u/\sqrt{2})}{\operatorname{erf}(\overline{\beta}/\sqrt{2})} - 1; \quad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi. \tag{18}$$

Условие (17) приводит к трансцендентному уравнению, определяющему значение $\overline{\beta}$;

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\overline{\beta}}{\sqrt{2}}\right) e^{-(\overline{\beta})^2/2}\, \overline{\beta} q = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,. \tag{19}$$

Так как

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\overline{\beta}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(\overline{\beta})^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \left(\frac{\overline{\beta}}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)}\,, \tag{20}$$

из (19) следует

$$\frac{2}{q} = (\overline{\beta})^2 + \frac{1}{1\cdot 3}(\overline{\beta})^4 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}(\overline{\beta})^6 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}(\overline{\beta})^8 + \cdots \tag{21}$$

Решение уравнения (10) можно представить в форме ряда

$$\Theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n\Theta}{du^n}\right)_{u=\beta} \frac{(u-\beta)^n}{n!}\,. \tag{22}$$

Из условий (12) и (13) видно, что

$$\Theta(\beta) = 1; \quad \left(\frac{d\Theta}{au}\right)_{u=\beta} = \frac{q\beta}{1+\alpha_1}\,. \tag{23}$$

Путем последовательного дифференцирования уравнения (10) находим производные функции $\Theta(u)$ более высокого порядка при $u=\beta$:

$$\left(\frac{d^2\Theta}{du^2}\right)_{u=\beta} = -\beta^2\left[\frac{1+\alpha_2}{(1+\alpha_1)^2}q + \frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1)^3}q^2\right]; \tag{24}$$

$$\left(\frac{d^3\Theta}{au^3}\right)_{u=\beta} = -\beta\frac{1+\alpha_2}{(1+\alpha_1)^2}q + \beta^3\left[\frac{(1+\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1)^3}q + \frac{4\alpha_1+3\alpha_1\alpha_2-\alpha_2}{(1+\alpha_1)^4}q^2 + \frac{3\alpha_1^2}{(1+\alpha_1)^5}q^3\right]; \tag{25}$$

$$\left(\frac{d^4\Theta}{au^4}\right)_{u=\beta} = \beta^2\left[\frac{3(1+\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1)^3}q + \frac{6\alpha_1+4\alpha_1\alpha_2-2\alpha_2}{(1+\alpha_1)^4}q^2\right] - \beta^4\left[\frac{(1+\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1)^4}q + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+\alpha_2)(11\alpha_1+7\alpha_1\alpha_2-4\alpha_2)}{(1+\alpha_1)^5}q^2 + \frac{\alpha_1(25\alpha_1+18\alpha_1\alpha_2-7\alpha_2)}{(1+\alpha_1)^6}q^3 + \frac{15\alpha_1^3}{(1+\alpha_1)^7}q^4\right] \tag{26}$$

и т. д.

Согласно условию (11)

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{d^n\Theta}{du^n}\right)_{u=\beta}\frac{\beta^n}{n!}\,. \tag{27}$$

Подставив выражения (24), (25), (26) и т. д. в (27), получим после некоторых преобразований ряд по четным степеням искомой постоянной β

$$\frac{2}{q}(1+\alpha_1) = \beta^2 + \beta^4\left[\frac{1+\alpha_2}{3(1+\alpha_1)} + \frac{\alpha_1}{2(1+\alpha_1)^2}q\right] + \beta^6\left[\frac{(1+\alpha_2)^2}{15(1+\alpha_1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5\alpha_1+4\alpha_1\alpha_2-\alpha_2}{12(1+\alpha_1)^3}q + \frac{\alpha_1^2}{2(1+\alpha_1)^4}q^2\right] + \beta^8\left[\frac{(1+\alpha_2)^3}{105(1+\alpha_1)^3} + \frac{(1+\alpha_2)(31\alpha_1+22\alpha_1\alpha_2-9\alpha_2)}{180(1+\alpha_1)^4}q + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1(19\alpha_1+15\alpha_1\alpha_2-4\alpha_2)}{30(1+\alpha_1)^5}q^2 + \frac{5\alpha_1^3}{8(1+\alpha_1)^6}q^3\right] + \cdots \tag{28}$$

Легко видеть, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ряд (28) переходит в ряд (21).

При конкретном задании значений α_1 и α_2 сходимость ряда (28) исследуется обычными методами.

Выражение (28) является трансцендентным уравнением, из которого можно определить значение β графическим путем или методом обращения степенных рядов. Зная β, не представляет труда вычислить скорость продвижения фронта кристаллизации при затвердевании металлического слитка

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\beta \sqrt{a}}{\sqrt{2t}}. \tag{29}$$

В случае более сложной зависимости λ и c от T схема решения задачи остается без изменений, только расчетные формулы будут иные.

Могут быть случаи, когда расчет с большой точностью может быть проведен по формуле (21) и значение β практически не отличается от $\bar{\beta}$.

Вычислим скорость кристаллизации алюминиевого слитка. В этом случае ([3]) $Q = 95{,}5 \frac{\text{кал}}{\text{г}}$; $T_{\text{кр}} = 659°\,\text{C}$; $\gamma = 2{,}7 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Зависимость λ и γc от T для алюминия приведена в работе ([4]). Аналитически зависимость λ и c от T в широком интервале температур может быть представлена формулами: $\lambda \cong (0{,}5 - 0{,}00025T\,°\text{C}) \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$; $c = (0{,}2096 + 0{,}0001T\,°\text{C}) \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$.

Полагаем $T_0 = 100°\,\text{C}$, тогда $\alpha_1 = -0{,}1725$; $\alpha_2 = 0{,}1129$; $q = 1{,}1{,}3803$. Из ряда (28) получаем $\beta = 1{,}011$. Расчет при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ дает $\bar{\beta} = 0{,}989$.

В рассмотренном случае $\beta / \bar{\beta} = 1{,}023$, т. е. ошибка в определении β вследствие температурной зависимости теплофизических параметров алюминия несколько больше 2% от вычисляемой величины. Таким образом, при расчете затвердевания алюминиевого слитка с достаточной точностью можно считать β равным $\bar{\beta}$.

Возможны случаи кристаллизации металлов (особенно тугоплавких), когда β значительно более существенно, чем в приведенном примере, отличается от $\bar{\beta}$.

Институт металловедения и физики металлов
ЦНИИЧМ

Поступило
31 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Гранат, А. К. Жегалов, Кристаллизация и строение стального слитка, Л.—М., 1935. [2] Б. Я. Любов, ДАН, **68**, 847 (1949). [3] Справочник металлурга по цветным металлам, 1, 1953. [4] M. L. Storm, J. Appl. Phys., **22**, 940 (1951).