Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

ЛИ ЕН ПИР

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 VII 1953)

Обозначим через N класс функций $w = f(z)$, $f(1) = 1$, регулярных и однолистных в круговом кольце R_q^*: $m < |z| < M$, $m/M = q$, $m < 1 < M$, и отображающих это кольцо на двухсвязную область w-плоскости так, чтобы окружность $|z| = m$ переходила во внутреннюю границу γ_m, если обе границы конечны, или в конечную границу γ_m, если одна из границ бесконечна. Точка $w = 0$ лежит внутри γ_m или на γ_m.

Для дальнейшего нам потребуется уже известная лемма [1]:

Лемма. *Если функция $f(z)$ регулярна в кольце R_q': $m < |z| < M$, $m/M = q$, и непрерывна в $\overline{R}_q'$: $m \leqslant |z| \leqslant M$, то справедливо в кольце R_q' интегральное представление*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(f(me^{i\theta})\right) K_q(mz^{-1}e^{i\theta})\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(f(Me^{i\theta})\right) K_q(M^{-1}ze^{-i\theta})\, d\theta - C + iD,$$

где

$$K_q(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta} - \frac{1+q^{2\nu}\zeta^{-1}}{1-q^{2\nu}\zeta^{-1}} \right),$$

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(f(z')\right) d\theta, \quad D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left(f(z')\right) d\theta, \quad z' = q'e^{i\theta}, \ m \leqslant q' \leqslant M.$$

Доказательство этой леммы можно свести к методу решений функциональных уравнений, которым уже пользовался Г. М. Голузин для получения частного случая этой леммы [2].

Опираясь на эту лемму, следуя методу Г. М. Голузина [2], докажем следующую теорему, являющуюся обобщением уравнения Левнера [3] для кругового кольца.

Теорема 1. *Каждой функции $w = f(z) \in N$, отображающей кольцо R_q^* на всю w-плоскость с двумя разрезами вдоль некоторых непрерывных кривых без кратных точек, уходящих одним своим концом, соответственно, в точки $w = 0$ и $w = \infty$, можно поставить в соответствие непрерывные функции комплексного переменного $k_1(t)$ и $k_2(t)$ с $|k_1(t)| = |k_2(t)| = 1$, $0 < t < \infty$, и параметр λ, равный* *нулю или единице, такие, что функция $f(z)$ может быть представлена формулой*

$$f(z)=\lim_{t\to\infty} f(z, t),$$

где $f=f(z,t)$ является в $0<t<\infty$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \log f}{\partial t}=\lambda\{K_{q_t}(f^{-1}m_tk_1(t))-K_{q_t}(m_tk_1(t))\}+$$
$$+(\lambda-1)\{K_{q_t}(fM_t^{-1}k_2(t)^{-1})-K_{q_t}(M_t^{-1}k_2(t)^{-1})\}, \tag{1}$$

удовлетворяющим начальному условию $f|_{t=0}=z$. Здесь $m_t/M_t=q_t=qe^{-t}$, а M_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\log M_t}{dt}=\lambda\{1-\operatorname{Re}(K_{q_t}(q_tk_1(t)))\}+(1-\lambda)\operatorname{Re}(K_{q_t}(M_t^{-1}k_2(t)^{-1})), \tag{2}$$

причем $M_t|_{t=0}=M$.

При доказательстве этой теоремы мы укорачиваем оба разреза по очереди, причем, когда укорачиваем только конечный разрез, то $\lambda=1$, и когда укорачиваем только бесконечный разрез, то $\lambda=0$.

В случае, когда при отображении внутренняя окружность кольца $q<|z|<1$ сохраняется, обобщенное уравнение Левнера уже получено Комацу [4] и позже, но более простым методом, Г. М. Голузиным [2].

На основании теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 2. *Для функции $f(z)\in N$ в кольце R_q^* при $|z|=r$, $m<r<M$ имеют место точные оценки*

$$|f_0(-r)|\leqslant|f(z)|\leqslant|f_\pi(-r)|, \tag{3}$$

где $w=f_0(z)$ — функция класса N, отображающая кольцо R_q^* на область, полученную из всей w-плоскости выбрасыванием отрезка положительной части вещественной оси с концом в точке $w=0$ и некоторого луча, лежащего целиком на отрицательной части вещественной оси, а $w=f_\pi(z)$ — функция класса N, отображающая кольцо R_q^* на область, полученную из всей w-плоскости выбрасыванием отрезка отрицательной части вещественной оси с концом в точке $w=0$ и некоторого луча, лежащего целиком на положительной части вещественной оси.

Доказательство. Достаточно ограничиться рассмотрением функций $w=f(z)\in N$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Построим согласно теореме 1 функцию $f(z,t)$, $\lim_{t\to\infty} f(z,t)=f(z)$, и также функции $f_0(z,t)$ и $f_\pi(z,t)$, соответственно, для $f_0(z)$ и $f_\pi(z)$ так, чтобы они являлись решениями уравнения (1) с таким же параметром λ, какой был взят для функции $f(z)$. Тогда обозначим для $f_\pi(z,t)$ функции m_t и M_t, соответственно, через m_t^* и M_t^*, а для $f_0(z,t)$ через m_t^{**} и M_t^{**}.

Из уравнения (2) имеем

$$\frac{d\log\dfrac{M_t}{M_t^*}}{dt}=-\lambda\{\operatorname{Re}(K_{q_t}(M_tq_tk_1(t)))-K_{q_t}(-M_t^*q_t)\}-$$
$$-(1-\lambda)\{K_{q_t}(M_t^{*-1})-\operatorname{Re}(K_{q_t}(M_t^{-1}k_2(t)^{-1}))\}. \tag{4}$$

Отсюда легко получим при $0 \leqslant t < \infty$

$$M_t \leqslant M_t^*; \quad \lim_{t \to \infty} M_t^* = \infty. \tag{5}$$

Если введем обозначения

$$\widetilde{M}_t = \frac{|f|}{M_t} q_t^{-1}, \qquad \widetilde{M}_t^* = \frac{|f_\pi|}{M_t^*} q_t^{-1}$$

и составим для этих функций уравнение, аналогичное уравнению (4), то получим $\widetilde{M}_t \leqslant \widetilde{M}_t^*$ при $0 \leqslant t < \infty$.

Отсюда, используя (5), получим

$$|f(z, t)| \leqslant |f_\pi(-r, t)|, \quad |z| = r. \tag{6}$$

Рассуждая аналогично, найдем

$$|f_0(-r, t)| \leqslant |f(z, t)|, \quad |z| = r \tag{7}$$

и $\lim\limits_{t \to \infty} m_t^{**} = 0$.

Если мы докажем, что $\lim\limits_{t \to \infty} m_t^* = 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} M_t^{**} = \infty$, то легко увидим возможность предельного перехода в (6) и (7) при $t \to \infty$, который дает искомые оценки (3).

Для доказательства, например, того, что $\lim\limits_{t \to \infty} m_t^* = 0$, нужно составить уравнения для $\hat{m}_t^{**} = |f_\pi(-1, t)|^{-1} m_t^*$ и для m_t^{**}. Сравнивая получаемые уравнения, заключаем, что $\hat{m}_t^{**} = m_t^{**}$. Отсюда следует $\lim\limits_{t \to \infty} m_t^* = 0$. Теорема доказана.

Удается указать явные выражения для функций $f_0(z)$ и $f_\pi(z)$ ([5]), именно:

$$f_0(z) = z \left(\frac{P_q(M^{-1})}{P_q(-m)} \right)^2 \left(\frac{P_q(-mz^{-1})}{P_q(M^{-1}z)} \right)^2,$$

$$f_\pi(z) = z \left(\frac{P_q(-M^{-1})}{P_q(m)} \right)^2 \left(\frac{P_q(mz^{-1})}{P_q(-M^{-1}z)} \right)^2,$$

где

$$P_q(\zeta) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - q^{2\nu}\zeta)(1 - q^{2\nu+2}\zeta^{-1}).$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, Тр. физ.-матем. отд. АН УССР, **7**, в. 2 (1928). [2] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **29** (71), 2 (1951). [3] Г. М. Голузин, Усп. матем. наук, в. 6 (1939). [4] Y. Komatu, Proc. Phys.-Mat. Soc. Japan, **25** (1943). [5] Ли Ен Пир, Диссертация, ЛГУ, 1953.