Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 25 VI 1953)

Естественным обобщением плоской задачи Дирихле является следующая: даны две плоские области G и Γ, непрерывное отображение границы одной на границу другой и некоторая система двух дифференциальных уравнений для двух функций от двух переменных. Требуется найти непрерывное отображение замкнутой области $\overline{G}$ на $\overline{\Gamma}$, совпадающее на границе G с заданным, а внутри G взаимно-однозначное и удовлетворяющее данной системе дифференциальных уравнений.

Задача заключается прежде всего в отыскании классов дифференциальных уравнений, для которых поставленный вопрос является корректным. Естественно рассматривать уравнения второго порядка, так как для уравнений первого порядка (сильно эллиптического типа) в теории квази-конформных отображений М. А. Лаврентьевым (1) доказано, что требуемое отображение (при некоторых дополнительных ограничениях) вполне определяется знанием образов трех граничных точек области G.

Вторая задача заключается в отыскании необходимых и достаточных условий, налагаемых на граничные отображения, при которых в классе рассматриваемых отображений можно найти требуемое отображение.

В настоящей заметке мы решаем прежде всего вторую задачу для частного случая отображений, задаваемых гармоническими функциями. Далее, исследуя свойства гармонического отображения, мы показываем, что область, на которой оно задано, естественным образом распадается на ряд подобластей, называемых нами каноническими компонентами, на которых гармоническое отображение обладает многими свойствами аналитических функций: якобиан отображения может обращаться в нуль только в изолированных точках, в окрестности нуля якобиана отображение не взаимно-однозначно, имеют место принцип максимума и принцип минимума, принцип сохранения области, из взаимной однозначности отображения на границе области следует взаимная однозначность внутри области, предел равномерно сходящейся последовательности взаимно-однозначных (однолистных) отображений есть взаимно-однозначное гармоническое отображение и некоторыми другими.

Канонические компоненты обладают также свойством максимальности в том смысле, что на всякой области, лежащей в области задания отображения и строго содержащей данную компоненту, отображение заведомо не взаимно-однозначно.

Пусть K — открытый круг с центром в начале координат и радиуса 1; γ — окружность, являющаяся границей K, и θ — полярный угол. Для всякой функции $\varphi(\theta)$, определенной на γ_0, мы через $\tilde{\varphi}(\theta)$ будем обозначать сопряженную с ней функцию (т. е. функцию, ряд Фурье которой сопряжен с рядом Фурье функции $\varphi(\theta)$). Положим $\Phi(\theta) = \varphi(\theta) + i\tilde{\varphi}(\theta)$; пусть $\Phi(\theta) \neq 0$ для $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; через $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} \Phi$ обозначим полное изменение какой-либо непрерывной ветви $\operatorname{Arg} \Phi(\theta)$ вдоль γ.

Теорема 1. *Пусть $f(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$ — взаимно-однозначное отображение γ на простую замкнутую линию, ограничивающую конечную область G, причем $f(\theta)$ имеет производную, удовлетворяющую условию Гёльдера степени $\alpha < 1$. Пусть, далее, $F(z) = u(z) + i\tilde{u}(z)$, $z \in \gamma$ и $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} F(z) = 0$.*

Для того чтобы существовало отображение замкнутого круга $\overline{K}$ на $\overline{G}$, взаимно-однозначное и гармоническое в K, непрерывное в $\overline{K}$, совпадающее с заданным отображением на окружности γ и такое, что $\min\limits_{\overline{K}} \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d\tilde{u}(\theta)}{d\theta} \frac{dv(\theta)}{d\theta} - \frac{d\tilde{u}(\theta)}{d\theta} \frac{dv(\theta)}{d\theta} \neq 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Существует пример, показывающий, что условия теоремы 1, если из них выбросить требование $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} F'(z) = 0$, делаются недостаточными для существования соответствующего отображения. В случае, если $f(\theta)$ дважды дифференцируема и ее вторая производная удовлетворяет условию Гёльдера степени $\alpha < 1$, то условие $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} F'(z) = 0$ эквивалентно условию

$$\int\limits_\gamma \frac{F''(z)}{F'(z)} dz = 0.$$

Теорема без труда обобщается на случай произвольной односвязной области, ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой кривой. Для этого достаточно данную область конформно отобразить на круг, тогда граничное отображение в силу одной теоремы Лаврентьева—Бессонова [2] имеет непрерывную не обращающуюся в нуль производную, и потому вышенаписанным условиям на границе круга соответствуют подобные же условия на границе области.

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ и $v(z)$ — гармонические функции, определенные в области G. Для того чтобы $u(z)$ и $v(z)$ были зависимы, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_1 u(z) + \alpha_2 v(z) + \beta = 0$, где α_1, α_2 и β — постоянные, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.*

Пусть теперь G — плоская область, $f(z) = u(z) + iv(z)$ — гармоническое отображение G, $z = x + iy$, функции $u(z)$ и $v(z)$ независимы в G, $G_0 = \underset{(x,y)}{\mathscr{E}} \left\{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0\right\}$, а E_0 — множество изолированных точек множества G_0. Легко видеть, что $(G \setminus G_0) \cup E_0$ есть открытое множество и, значит, все его компоненты суть области, которые мы будем называть каноническими компонентами (относительно данного отображения).

Теорема 3. *Множество G_0 состоит из не более чем счетного числа аналитических дуг, их концов, являющихся особыми точками, и, быть может, еще счетного изолированного в G множества. При этом изолированные точки множества G_0 не имеют предельных точек в G.*

Теорема 4. *В каждой канонической компоненте якобиан отображения f не меняет знака, а в двух соседних (т. е. имеющих* *принадлежащую G общую дугу на границе) якобиан имеет противоположный знак.*

Грубо говоря, это обозначает, что нулевая линия уровня якобиана гармонического отображения всегда является «линией перегиба» отображения.

Теорема 5. Принцип максимума. *Пусть Γ — каноническая компонента, D — конечная область, $\overline{D} \subseteq \overline{\Gamma}$ и отображение $f(z)$ непрерывно на $\overline{D}$. Тогда максимум $|f(z)|$ достигается на границе D.*

Теорема 6. Принцип минимума. *Пусть Γ — каноническая компонента, D — конечная область, граница γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых линий, и $f(z)$ непрерывна на $\overline{D} \subseteq \overline{\Gamma}$. Тогда, если $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = 0$*, то $\min\limits_{\overline{D}} |f(z)| \neq 0$ и минимум $|f(z)|$ достигается на границе D.*

Теорема 7. Принцип взаимно-однозначных отображений. *Пусть Γ — каноническая компонента, D — конечная область, ограниченная конечным числом простых замкнутых линий, $\overline{D} \subseteq \overline{\Gamma}$, отображение $f(z)$ непрерывно на $\overline{D}$ и взаимно-однозначно на границе D. Тогда $f(z)$ взаимно-однозначно и на D.*

Теорема 8. *Пусть последовательность однолистных гармонических отображений области G сходится равномерно внутри области G к отображению $f(z) = u(z) + iv(z)$. Тогда $f(z)$ также есть гармоническое отображение области G и притом однолистное, если только $u(z)$ и $v(z)$ независимы.*

Отметим еще одну теорему подобного типа, касающуюся уже произвольных непрерывных отображений.

Теорема 9. *Пусть $f_n(z)$ — последовательность однолистных непрерывных отображений — равномерно внутри области G сходится к аналитической функции $f(z)$, не равной тождественно постоянной. Тогда предельная функция также однолистна.*

Московский физико-технический
институт

Поступило
18 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 6, 513 (1948).
[2] М. А. Лаврентьев, П. А. Бессонов, Bull. Soc. Math. France, 58, 175 (1930).

* При этом внешняя простая замкнутая линия из границы γ ориентируется соответственно, а все внутренние — противоположно некоторой фиксированной ориентации плоскости.