Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Д. БАХРАХ

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

(Представлено академиком А. И. Бергом 31 VII 1953)

Как известно, в случае линейной антенны диаграмма направленности последней $F(\varphi)$ связана с распределением тока $I(z)$ вдоль антенны следующим интегральным уравнением:

$$F(\varphi) = \sin\varphi \int_{-a}^{a} I(z)\, e^{ikz\cos\varphi}\, dz, \tag{1}$$

где $2a$ — длина линейной антенны; φ — угол, отсчитываемый от оси антенны; $k = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны.

Общая задача синтеза линейной антенны сводится к расчету распределения тока $I(z)$ вдоль антенны, обеспечивающего заданную диаграмму направленности.

Решаемое здесь интегральное уравнение привлекало внимание и ранее, ему посвящены, например, работы Рамма [1] и других авторов, однако полного решения интегрального уравнения в них не давалось. А. А. Пистолькорсу [2] удалось методом, отличным от излагаемого здесь, решить задачу для плоской антенны.

Уравнение (1) является уравнением Фредгольма первого рода. Формально при симметричном ядре можно искать решение уравнения Фредгольма первого рода в форме [3]:

$$I(z) = \sum \mu_\nu x_\nu f_\nu(z), \tag{2}$$

где

$$x_\nu = \int F(\varphi) f_\nu(\varphi)\, d\varphi \tag{3}$$

представляют собой коэффициенты разложения диаграммы направленности $F(\varphi)$ по собственным функциям $f_\nu(\varphi)$ ядра интегрального уравнения; μ_ν — собственные числа ядра. Если ряд (2) равномерно сходится, то он представляет собой решение уравнения.

Таким образом, задача сводится к отысканию собственных функций f_ν ядра $e^{ikz\cos\varphi}\sin\varphi$ собственных чисел последнего μ_ν и коэффициентов разложения заданной функции по собственным функциям ядра.

Покажем, что можно привести ядро интегрального уравнения $K(z, \varphi)$ к такому виду, при котором ядро симметрично и собственными функциями его являются функции Матье, а собственные числа пропорциональны значениям функций Матье — Ханкеля при аргументе, равном нулю.

Поскольку физическая постановка задачи требует решения в функциях Матье типа $\mathrm{se}_{2n}(h, \varphi)$ и $\mathrm{se}_{2n+1}(h, \varphi)$, преобразуем интегральное уравнение (1) к такому виду, при котором собственными функциями преобразованного ядра являются указанные функции Матье. Произведем подстановку

$$z = a\cos\eta. \tag{4}$$

Тогда ядро интегрального уравнения (1) примет вид:

$$K(\eta, \varphi) = \sin\varphi \sin\eta\, e^{ika\cos\eta\cos\varphi}. \tag{5}$$

Заметим, что ядро приобрело симметричный вид и, следовательно, решение интегрального уравнения можно искать в виде (2). Интегральное уравнение (1) после замены переменных приобретает вид:

$$F(\varphi) = a\int_0^\pi J(\eta)\sin\varphi\sin\eta\, e^{ika\cos\eta\cos\varphi}\, d\eta. \tag{6}$$

Можно доказать ([4]), что, если ядро $K(\eta, \varphi)$ представляет собой непрерывную периодическую функцию η и φ с периодом π или 2π и, кроме того, удовлетворяет следующим двум уравнениям:

$$\left[Y\frac{\partial K}{\partial\eta} - \frac{\partial Y}{\partial\eta}K\right]_0^\pi = 0;$$
$$\frac{\partial^2 K}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2} - 2h^2(\cos 2\eta - \cos 2\varphi)K = 0, \tag{7}$$

причем $Y(h, \eta)$ — периодическая функция Матье, то $Y(h, \varphi)$ есть собственная функция ядра $K(\eta, \varphi)$, т. е.

$$Y(h, \varphi) = \mu\int_0^\pi K(\eta, \varphi)\, Y(h, \eta)\, d\eta, \tag{8}$$

а параметр $h = ka/2$.

Ядро типа $\sin\varphi\sin\eta\cos(2h\cos\eta\cos\varphi)$ удовлетворяет условиям (7) и для него собственной функцией является $\mathrm{se}_{2n+1}(h, \eta)$.

Легко показать, что $\mathrm{se}_{2n+1}(h, \varphi)$ является собственной функцией также ядра (5). В самом деле:

$$\int_0^\pi \sin\varphi\sin\eta\, e^{i2h\cos\eta\cos\varphi}\,\mathrm{se}_{2n+1}(h, \eta)\, d\eta =$$
$$= i\int_0^\pi \sin\varphi\sin\eta\sin(2h\cos\eta\cos\varphi)\,\mathrm{se}_{2n+1}(h, \eta)\, d\eta +$$
$$+ \int_0^\pi \sin\varphi\sin\eta\cos(2h\cos\varphi\cos\eta)\,\mathrm{se}_{2n+1}(h, \eta)\, d\eta. \tag{9}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как

$$\mathrm{se}_{2n+1}(h, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2n+1, 2m+1}\sin(2m+1)\eta, \tag{10}$$

и подинтегральная функция первого слагаемого является нечетной функцией относительно $\pi/2$.

Следовательно:

$$\mathrm{se}_{2n+1}(h, \varphi) = \mu_{2n+1}\int_0^\pi \sin\varphi\sin\eta\, e^{i2h\cos\eta\cos\varphi}\,\mathrm{se}_{2n+1}(h, \eta)\, d\eta. \tag{11}$$

Для определения характеристического числа μ_{2n+1} следует разложить в ряд Фурье, соответственно, функции $e^{i2h\cos\eta\cos\varphi}$ и $\mathrm{se}_{2n+1}(h, \varphi)$. Затем, подставив в выражении (11) соответствующие разложения в ряд Фурье указанных функций и проинтегрировав от 0 до π, получим:

$$\mathrm{se}_{2n+1}(h, \varphi) = \mu_{2n+1} \frac{\pi \operatorname{tg} \varphi}{2h} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2n+1, 2r+1} J_{2r+1}(2h, \cos\varphi). \qquad (12)$$

Полагая $\varphi = \pi/2$ и замечая, что $\operatorname{tg}\varphi\, J_1(h, \cos\varphi) \to h$ при $\varphi \to \pi/2$ (в чем легко убедиться, применив правило Лопиталя), окончательно получаем:

$$\mu_{2n+1} = \frac{2\,\mathrm{se}_{2n+1}(h, \pi/2)}{\pi B_{2n+1,1}}. \qquad (13)$$

Нетрудно показать, что функция $\mathrm{se}_{2n+2}(h, \varphi)$ также является собственной функцией ядра (6). Для нахождения собственного числа μ_{2n+2} производятся операции, аналогичные совершенным при определении μ_{2n+1}. В результате получаем:

$$\mu_{2n+2} = \frac{2\,\mathrm{se}'_{2n+2}(h, \pi/2)}{i\pi h B_{2n+2}}. \qquad (14)$$

Можно показать, что полученные значения собственных чисел μ_{2n+1} и μ_{2n+2} совпадают со значениями функций Матье — Ханкеля соответствующих порядков при $\xi = 0$ с точностью до множителя $(-i)^n h$.

В самом деле, используя ряды для определения функции Матье — Ханкеля, приведенные у Мак-Лаклана ([4]), и модифицируя их так, чтобы нечетная функция Матье — Ханкеля $Hs_n^{(2)}(h, \xi)$ при $\xi \to \infty$ совпала с функцией Ханкеля $H_n^{(2)}(\xi)$, получаем:

$$Hs_{2n+1}^{(2)}(n, 0) = \frac{(-1)^{n+1} (\mathrm{se}_{2n+1}(h, \pi/2))\, i}{\pi h B_{2n+1,1}}, \qquad (15)$$

$$Hs_{2n+2}^{(2)}(n, 0) = \frac{(-1)^{n+1}\, \mathrm{se}'_{2n+2}(h, \pi/2)}{\pi h^2 B_{2n+2,2}}. \qquad (16)$$

Поскольку преобразованное ядро $\sin\eta \sin\varphi\, e^{i2h\cos\eta\cos\varphi}$ симметрично относительно η и φ, допустимо решение соответствующего интегрального уравнения написать в виде ряда собственных функций, т. е. искомое распределение тока в антенне (с точностью до постоянного множителя) приобретает вид:

$$J(\eta) = iA_{2n+1} \frac{\mathrm{se}_1(h, \pi/2)}{B_{1,1}} \mathrm{se}_1(h, \eta) - A_2 \frac{\mathrm{se}'_2(h, \pi/2)}{hB_{2,2}} \mathrm{se}_2(h, \eta) +$$
$$+ iA_3 \frac{\mathrm{se}_3(h, \pi/2)}{B_{3,1}} \mathrm{se}_3(h, \eta) + \ldots, \qquad (17)$$

где A_n — коэффициенты разложения заданной диаграммы направленности в ряд по функциям Матье.

Полученное выражение для тока в линейной антенне (17) совпадает с решением задачи для плоской антенны, исходящим из метода, предложенного ранее А. А. Пистолькорсом ([2]).

Если учесть, что система функций Матье взаимно ортогональна и ортогональна тригонометрическим функциям в интервале $0 \div \pi$, то вычисление коэффициентов A_n сводится к нахождению коэффициентов Фурье заданной диаграммы направленности и последующим простым арифметическим операциям.

Можно сделать некоторые выводы о разрешимости интегрального уравнения (1).

1. Интегральное уравнение (1) имеет решение в виде конечной суммы гармоник Матье, если диаграмма направленности задана в виде конечной суммы гармоник Матье.

2. Интегральное уравнение имеет решение в виде сходящегося ряда функций Матье, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n A_n \mathrm{se}_n(h, \varphi)$ равномерно сходится.

Но последовательность собственных чисел μ_n возрастает, поэтому для сходимости упомянутого ряда необходимо, чтобы коэффициенты разложения диаграммы направленности по функциям Матье убывали достаточно быстро с возрастанием n. Последнее обстоятельство накладывает определенные ограничения на форму диаграммы направленности. Именно, последовательность коэффициентов A_n разложения диаграммы направленности в ряд по функциям Матье должна убывать быстрее, чем последовательность чисел μ_n, определяемых выражениями (13) и (14). Полученное решение интегрального уравнения линейной антенны может быть распространено на плоскую антенну.

Автор выражает признательность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу за внимание при проведении настоящей работы и ценные советы.

Поступило
4 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. С. Рамм, Научно-технический сборник по электросвязи Ленинградск. электротехн. ин-та связи, в. 19 (1937). [2] А. А. Пистолькорс, ДАН, 89, № 5 (1953). [3] Д. Гильберт, Р. Курант, Методы математической физики, 1, 1935. [4] N. W. McLachlan, Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford, 1947.