ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

V. 70, N 6 JOURNAL OF APPLIED SPECTROSCOPY November — December 2003

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА БИИЗОТРОПНОМ ШАРЕ В ВАКУУМЕ

В. Н. Капшай *, В. В. Кондратюк

УДК 537.874.6

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь,
246699, Гомель, ул. Советская, 104; e-mail: kvn@gsu.unibel.by, valery@gsu.unibel.by

(Поступила 13 ноября 2002, в окончательной редакции — 8 июля 2003)

Решена граничная задача о рассеянии плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны на биизотропном шаре в вакууме. Получены и проанализированы численно выражения для коэффициентов рассеянного и внутреннего полей.

Ключевые слова: *биизотропная среда, материальные уравнения, уравнения Максвелла, теория шаровых векторов, граничные условия, сферические функции Бесселя.*

The boundary problem on scattering of a plane circularly polarized electromagnetic wave on a bi-isotropic sphere in vacuum has been solved. The expressions obtained for the scattering coefficients and the internal fields have been numerically analyzed.

Keywords: *bi-isotropic medium, constituitive equations, Maxwell's equations, theory of spherical vectors, boundary conditions, Bessel's spherical function.*

Введение. В последнее время интенсивно ведутся исследования различных сложных естественных и искусственных макроскопических сред, например киральных (хиральных) и биизотропных, электромагнитные свойства которых описываются материальными уравнениями, содержащими "перекрестные" магнитоэлектрические слагаемые [1—6]. Любое внешнее поле (электрическое, магнитное) вызывает в них как электрическую, так и магнитную поляризацию. Важность изучения киральных и биизотропных сред объясняется тем, что, оставаясь изотропными, они тем не менее могут обладать электромагнитными свойствами, заметно отличными от свойств простых сред типа изотропных диэлектриков. Значение и различные аспекты исследования киральных и биизотропных сред хорошо освещены в литературе (см., например, монографии [7, 8]).

Следует отметить, что с середины 90-х гг. прошлого века ведется дискуссия о существовании невзаимных биизотропных сред. Авторы работ [9, 10] и многих других публикаций утверждают, что "распознаваемое существование" биизотропной среды невозможно. При этом они опираются на так называемое "ограничение Поста" [11]. Однако эти рассуждения относятся только к случаю бесконечных сред, поскольку Пост в лагранжевом подходе рассматривал лишь бесконечные среды. Для бесконечных, например негиротропных, сред введение параметра биизотропии χ только меняет показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ на $n = \sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}$, что может быть интерпретировано лишь как изменение параметра $\varepsilon \to \varepsilon' = \varepsilon - \chi^2/\mu$.

Фактически логика Поста основана на том, что переход от электродинамики бесконечной среды с $\chi = 0$ к среде с $\chi \neq 0$ с точки зрения лагранжева подхода означает переход к другому лагранжиану, отличающемуся от исходного на 4-дивергенцию. Таким образом, очевидно, что ограничение Поста получено для бесконечных (неограниченных) сред. Оно не работает, когда среда ограничена. На это авторам [9, 10] справедливо указывают авторы работ [12—15]. Другими словами, граничные условия электродинамики не выводятся в лагранжевом методе, между тем граничные задачи в электродинамике наиболее интересные. Более того, поскольку дискуссия о существовании биизотропных сред фактически не завершена, именно решение граничных задач должно внести дополнительную ясность по вопросу о том, что эффекты, обусловленные ненулевым параметром χ, нельзя объяснить простым изменением других параметров при $\chi = 0$. Задачи об отражении электромагнитных волн от плоских границ раздела (биизотропная среда—

SCATTERING OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVES ON A BI-ISOTROPIC SPHERE IN VACUUM

V. N. Kapshai * and V. V. Kondratyuk (*F. Scorina Gomel State University, 104 Sovetskaya Str., Gomel, 246019, Belarus; e-mail: kvn@gsu.unibel.by, valery@gsu.unibel.by*)

вакуум и т. д.) были рассмотрены ранее [7, 8]. В настоящей работе решается граничная задача о рассеянии в вакууме плоской циркулярно поляризованной электромагнитной волны на биизотропном шаре радиуса R.

Расчет коэффициентов рассеянного поля. Электромагнитные свойства биизотропной среды, не содержащей источников, в случае монохроматических полей вида $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ описываются материальными уравнениями [1—6]:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+(\chi+i\alpha)\mathbf{H},\ \mathbf{B}=(\chi-i\alpha)\mathbf{E}+\mu\mathbf{H}. \tag{1}$$

При решении граничных задач электродинамики сплошных сред, обладающих сферической симметрией, удобно использовать полную и ортонормированную систему шаровых векторов [16]. Сферические электромагнитные волны, которые могут распространяться в естественно гиротропной среде, получены в [17, 18]. С их использованием в [19, 20] решены граничные задачи о рассеянии на металлической сфере и гиротропном шаре, а в [21] — о рассеянии на более сложных объектах.

Сферические электромагнитные волны, записанные для биизотропной среды с помощью шаровых векторов, имеют вид [20]:

$$\mathbf{F}^{(z)}_{JM\nu}(k\,|\,\mathbf{r})=z_J(kr)\mathbf{Y}^J_{JM}(\mathbf{n}_r)+i\nu\left[a_J z_{J+1}(kr)\mathbf{Y}^{J+1}_{JM}(\mathbf{n}_r)-b_J z_{J-1}(kr)\mathbf{Y}^{J-1}_{JM}(\mathbf{n}_r)\right]. \tag{2}$$

Верхний индекс z у векторов $\mathbf{F}^{(z)}_{JM\nu}(k\,|\,\mathbf{r})$ отмечает тип используемых в (2) сферических функций $z_L(\rho)$, например: сферические функции Бесселя $z(\rho)\equiv j(\rho)$, Неймана $z(\rho)\equiv n(\rho)$ и Ханкеля 1-го рода $z(\rho)\equiv h^{(1)}(\rho)$; k — волновое число: $k=\omega/c$ — для волн в вакууме, $k_\nu=\left(\sqrt{\varepsilon\mu-\chi^2}+\nu\alpha\right)\omega/c$ — для волн в биизотропной среде.

Плоскую циркулярно поляризованную волну, распространяющуюся в вакууме вдоль оси z, разложим по сферическим волнам (2) следующим образом:

$$\mathbf{E}^{\text{пад}}_\nu(\mathbf{r})=-\nu E_0\mathbf{e}_\nu e^{-ikz}=\sum_{J=1}^{\infty}E_J\mathbf{F}^{(j)}_{J\nu\nu}(k\,|\,\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $E_J=i^J\sqrt{(2J+1)2\pi}E_0$. Учитывая структуру выражения (3), рассеянное поле представим в аналогичной форме, заменяя сферические функции Бесселя $j_L(\rho)$ сферическими функциями Ханкеля 1-го рода $h^1_L(\rho)$:

$$\mathbf{E}^{\text{рас}}_\nu(\mathbf{r})=-\sum_{J=1}^{\infty}E_J\sum_{\sigma=\pm1}f^J_{\sigma\nu}\mathbf{F}^{(h^1)}_{J\sigma\nu}(k\,|\,\mathbf{r}), \tag{4}$$

где $f^J_{\sigma\nu}$ — подлежащие определению коэффициенты рассеянного поля. В выражении (4) $\sigma=\pm1$ — поляризация рассеянной волны ($\sigma=1$ для правополяризованных циркулярных волн и $\sigma=-1$ для левополяризованных).

Используя уравнения Максвелла, материальные уравнения (1) и дифференциальные соотношения для шаровых векторов, нетрудно найти напряженности магнитного поля падающей и рассеянной волн:

$$\mathbf{H}^{\text{пад}}_\nu(\mathbf{r})=-i\nu\mathbf{E}^{\text{пад}}_\nu(\mathbf{r}), \tag{5}$$

$$\mathbf{H}^{\text{рас}}_\nu(\mathbf{r})=i\sum_{J=1}^{\infty}E_J\sum_{\sigma=\pm1}\sigma f^J_{\sigma\nu}\mathbf{F}^{(h^1)}_{J\sigma\nu}(k\,|\,\mathbf{r}). \tag{6}$$

Структура выражений, определяющих поля внутри шара, должна быть подобной структуре формул (4) и (6). Однако в них функции Ханкеля 1-го рода следует заменить функциями Бесселя, для удобства обозначенными $j_L(k_\sigma r)\equiv z_L(k_\sigma r)$, не имеющими особенностей в начале координат:

$$\mathbf{E}^{\text{вн}}_\nu(\mathbf{r})=\sum_{J=1}^{\infty}E_J\sum_{\sigma=\pm1}g^J_{\sigma\nu}\mathbf{F}^{(z)}_{J\sigma\nu}(k_\sigma\,|\,\mathbf{r}), \tag{7}$$

$$\mathbf{H}^{\text{вн}}_\nu(\mathbf{r})=-\frac{1}{\mu}\sum_{J=1}^{\infty}E_J\sum_{\sigma=\pm1}g^J_{\sigma\nu}\left(\chi+i\sigma\sqrt{\varepsilon\mu-\chi^2}\right)\mathbf{F}^{(z)}_{J\sigma\nu}(k_\sigma\,|\,\mathbf{r}), \tag{8}$$

где k_σ — волновые числа, соответствующие циркулярно поляризованным волнам в биизотропной среде. Входящие в (7) и (8) коэффициенты внутреннего поля $g^J_{\sigma\nu}$ также подлежат определению.

Граничные условия состоят в требовании непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности раздела:

$$\left[\mathbf{n},\ \mathbf{E}_{\nu}^{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\nu}^{\text{рас}} - \mathbf{E}_{\nu}^{\text{вн}}\right]_{r=R} = 0, \tag{9}$$

$$\left[\mathbf{n}, \mathbf{H}_{\nu}^{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\nu}^{\text{рас}} - \mathbf{H}_{\nu}^{\text{вн}}\right]_{r=R} = 0.$$

Учитывая в (9) выражения (3)—(8), получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов рассеянного и внутреннего полей:

$$\begin{gathered}
\sum_{\sigma=\pm1}\left\{f_{\sigma\nu}^{J} h_J(kR) + g_{\sigma\nu}^{J} z_J(k_\sigma R)\right\} = j_J(kR), \\
\sum_{\sigma=\pm1}\left\{f_{\sigma\nu}^{J}\frac{\sigma}{k}\tilde{h}'_J(kR) + g_{\sigma\nu}^{J}\frac{\sigma}{k_\sigma}\tilde{z}'_J(k_\sigma R)\right\} = \frac{\nu}{k}\tilde{j}'_J(kR), \\
\sum_{\sigma=\pm1}\left\{f_{\sigma\nu}^{J} i\sigma h_J(kR) + g_{\sigma\nu}^{J}\delta z_J(k_\sigma R)\right\} = i\nu\, j_J(kR), \\
\sum_{\sigma=\pm1}\left\{f_{\sigma\nu}^{J}\frac{1}{k}\tilde{h}'_J(kR) + g_{\sigma\nu}^{J}\frac{i\sigma\delta}{k_\sigma}\tilde{z}'_J(k_\sigma R)\right\} = \frac{1}{k}\tilde{j}'_J(kR).
\end{gathered} \tag{10}$$

В (10) использованы обозначения: $\delta_\sigma = \frac{1}{\mu}\left(\chi + i\sigma\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}\right)$, $\tilde{j}_J(\rho) = \rho j_J(\rho)$, $\tilde{z}_J(\rho) = \rho z_J(\rho)$ — функции Риккати—Бесселя, $\tilde{h}_J(\rho) = \rho h_J^1(\rho)$ — функции Риккати—Ханкеля 1-го рода; штрих обозначает дифференцирование по соответствующему аргументу. Решая систему (10), коэффициенты $f_{\sigma\nu}^{J}$ и $g_{\sigma\nu}^{J}$ представим в виде

$$f_{\sigma\nu}^{J} = \frac{k_\sigma}{k_\nu}\frac{\Delta_{\sigma\nu}^{f}}{\Delta}, \qquad g_{\sigma\nu}^{J} = \frac{k^1}{k_\nu}\frac{\Delta_{\sigma\nu}^{g}}{\Delta}. \tag{11}$$

Здесь Δ — главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix}
h_J(kR) & z_J(k_{+1}R) & h_J(kR) & z_J(k_{-1}R) \\
\frac{\tilde{h}'_J(kR)}{k} & \frac{\tilde{z}'_J(k_{+1}R)}{k_{+1}} & -\frac{\tilde{h}'_J(kR)}{k} & \frac{\tilde{z}'_J(k_{-1}R)}{k_{-1}} \\
ih_J(kR) & \delta_{+1}z_J(k_{+1}R) & -ih_J(kR) & \delta_{-1}z_J(k_{-1}R) \\
\frac{\tilde{h}'_J(kR)}{k} & i\delta_{+1}\frac{\tilde{z}'_J(k_{+1}R)}{k_{+1}} & -\frac{\tilde{h}'_J(kR)}{k} & -i\delta_{-1}\frac{\tilde{z}'_J(k_{-1}R)}{k_{-1}}
\end{vmatrix}, \tag{12}$$

$\Delta_{\sigma\nu}^{f}$ и $\Delta_{\sigma\nu}^{g}$ — характеристические определители.

Обсуждение результатов. Зависимость коэффициентов $f_{\sigma\nu}^{J}$ и $g_{\sigma\nu}^{J}$ от отношения радиуса шара R к длине падающей (в вакууме) электромагнитной волны λ показана на рис. 1. При этом, поскольку изменения этих зависимостей, связанные с наличием параметра $\chi \neq 0$, малы, мы (только в иллюстративных целях) приводим значения коэффициентов f и g при заведомо большом значении параметра $\chi = 0.7$.

В частном случае $\chi = 0$ значения коэффициентов (11) и (12) совпадают с полученными ранее значениями для этих же коэффициентов в задаче о рассеянии на гиротропном шаре [19]. Если дополнительно положить $\alpha = 0$, то получатся формулы для рассеяния на изотропном шаре с параметрами ε и μ. Анализ формул (11), (12) и графиков (в том числе не приведенных здесь) показывает, что коэффициенты f и g, соответствующие рассеянию на биизотропном шаре, при $\chi \neq 0$ нельзя воспроизвести с помощью формул, соответствующих случаю $\chi = 0$, как при $\alpha = 0$, так и при $\alpha \neq 0$. Причина этого заключается в том, что при $\chi \neq 0$ появляются "поляризации", отсутствующие при $\chi = 0$. Это видно, например, из выражения $\delta_\sigma = \frac{1}{\mu}\left(\chi + i\sigma\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}\right)$. При $\chi = 0$ эти величины — чисто мнимые, а при $\chi \neq 0$ обязательно имеют ненулевую вещественную часть, чего нельзя добиться никаким изменением параметров ε и μ при $\chi = 0$.

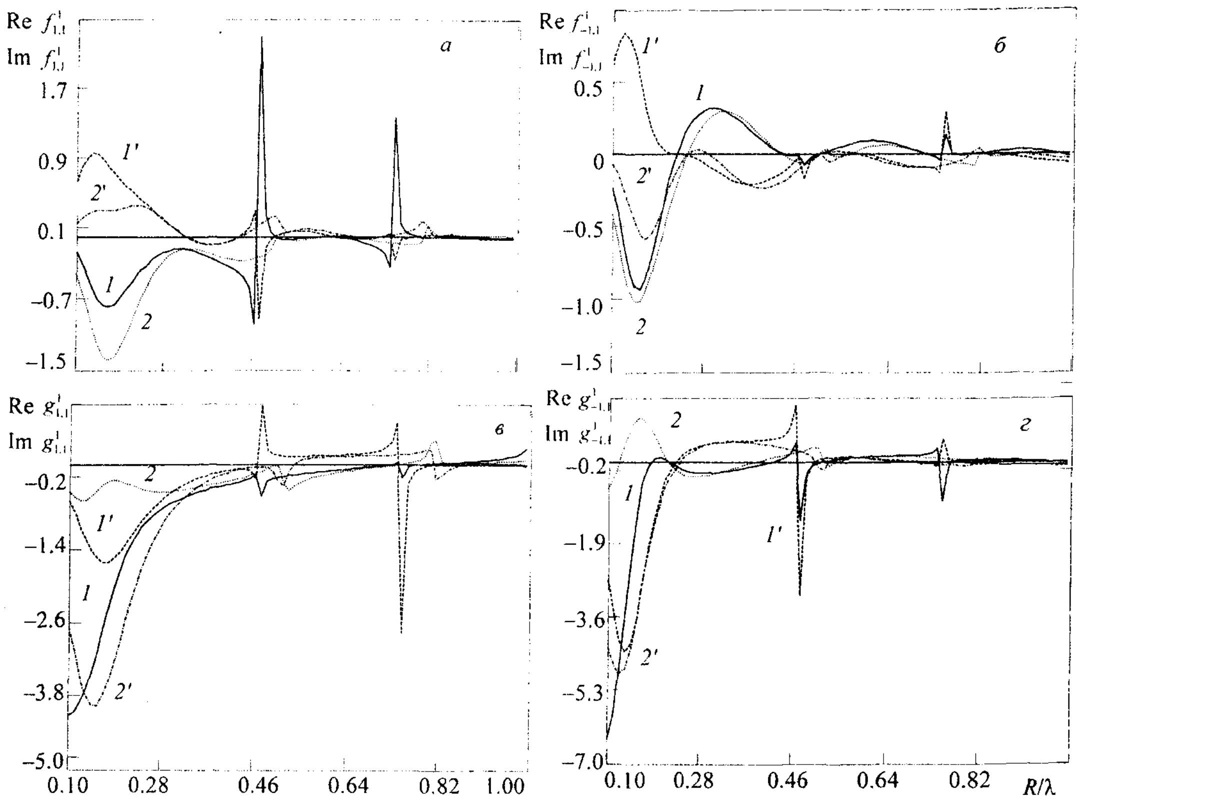

Рис. 1. Зависимости вещественной (*1*, *2*) и мнимой (*1'*, *2'*) частей: коэффициентов $f^1_{1,1}$ (*а*) и $f^1_{-1,1}$ (*б*) для поля, рассеянного биизотропной средой; коэффициентов $g^1_{1,1}$ (*в*) и $g^1_{-1,1}$ (*г*) внутреннего поля от R/λ при $\varepsilon\mu = 3$, $\alpha = 0.2$ и $\chi = 0$ (*1*, *1'*), $\chi = 0.7$ (*2*, *2'*)

Заключение. Полученные результаты указывают на качественное отличие биизотропных сред от гиротропных. По сути, измерение коэффициентов типа $f^J_{\sigma\nu}$ и $g^J_{\sigma\nu}$ позволит распознать биизотропную среду.

[1] **A.H.Sihvola, I.V.Lindell.** Microwave and Opt. Technol. Lett., **4**, N 8 (1991) 295—297

[2] **J.C.Monzon.** IEEE Transactions of Antennas and Propagation, **38**, N 2 (1990) 227—235

[3] **I.V.Lindell, A.H.Sihvola, A.J.Viitanen.** Microwave and Opt. Technol. Lett., **5**, N 2 (1992) 79—81

[4] **I.V.Lindell.** Proc. "Bi-isotropics' 93", Helsinki Univ. Tech. Electromagn. Lab. Rep., **137** (1993)

[5] **I.V.Semchenko, S.A.Tretyakov, A.N.Serdyukov.** Progress in Electromagnetic Research (PIER), **12** (1996) 335—370

[6] **S.Bolioli.** Advances in Complex Electromagnetic Materials, Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1997) 33—51

[7] **I.V.Lindell, A.H.Sihvola, S.A.Tretyakov, A.J.Viitanen.** Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media, Artech House, Boston and London (1994)

[8] **A.Serdyukov, I.Semchenko, S.Tretyakov, A.Sihvola.** Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications, Overseas Publishers Association (2001)

[9] **W.S.Weiglhofer, A.J.Lakhtakia.** J. Phys. A: Math. Gen., **30** (1997) 2597—2600

[10] **А.Лакхтакиа, В.С.Вейглхофер.** Радиотехника и электроника, **43**, № 4 (1998) 494—495

[11] **E.J.Post.** Formal Structure of Electromagnetics, Amsterdam, North-Holland (1962)

[12] **I.V.Semchenko, S.A.Khakhomov, S.A.Tretyakov, A.H.Sihvola, E.A.Fedosenko.** J. Phys. D: Appl. Phys., **31** (1998) 2458—2464

[13] **S.A.Tretyakov, A.H.Sihvola, I.V.Semchenko, S.A.Khakhomov.** J. Phys. D: Appl. Phys., **32** (1999) 2705—2706

[14] **R.E.Raab, A.H.Sihvola.** J. Phys. A: Math. Gen., **30** (1997) 1335—1344

[15] **В.Н.Капшай, В.В.Кондратюк.** Изв. вузов. Физика, № 11 (2000) 79—84

[16] **А.Б.Варшалович, А.Н.Москалев, В.К.Херсонский.** Квантовая теория углового момента, Ленинград (1975)

[17] **А.Н.Годлевская, В.А.Карпенко, А.Н.Сердюков.** Опт. и спектр., **59**, № 6 (1985) 1262—1265

[18] **А.А.Афонин, А.Н.Годлевская, В.Н.Капшай, А.Н.Сердюков.** Журн. прикл. спектр., **45**, № 2 (1986) 307—312

[19] **А.Н.Годлевская, В.Н.Капшай.** Докл. АН БССР, **33**, № 4 (1989) 332—335

[20] **А.Н.Годлевская, В.Н.Капшай.** Опт. и спектр., **68**, № 1 (1990) 122—127

[21] **А.А.Афонин, А.Н.Годлевская, В.Н.Капшай, С.П.Курлович, А.А.Сердюков.** Опт. и спектр., **69**, № 2 (1990) 406—411