Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

ФИЗИКА

Академик Л. ЛАНДАУ и И. ПОМЕРАНЧУК

ЭЛЕКТРОННО-ЛАВИННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Как было указано (1), развитая Бете и Гайтлером (Б.-Г.) теория тормозного излучения электронов и позитронов, а также образования электронно-позитронных пар γ-квантами не применима при достаточно больших энергиях частиц из-за многократного рассеяния электронов и позитронов в среде. В (1) был лишь оценен порядок величины энергий, при которых должны наступать заметные отклонения от формул Б.-Г. Сейчас мы рассмотрим радиационные процессы в таких условиях, при которых теория Б.-Г. несправедлива.

Рассмотрим сперва излучение квантов малых частот ($\omega \ll E$). Энергия, излученная в элементе телесного угла $d\mathbf{n}$ и в интервале частот $d\omega$, дается формулой (1) (1).

Для того чтобы получить более точные соотношения, проинтегрируем (1) (1) по всем направлениям кванта $\mathbf{n}$. Теряемая в интервале $d\omega$ энергия dI равна:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2}\,\omega^2 d\omega \iiint ([\mathbf{n}d\mathbf{r}_1]\,[\mathbf{n}d\mathbf{r}_2]\, e^{i\omega(t_1-t_2)-i(\mathbf{n},\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\omega} d\mathbf{n} =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\,\omega^2 d\omega \iiint e^{i\omega(t_1-t_2)}[d\mathbf{r}_1,\, d\mathbf{r}_2 - (\mathbf{n}d\mathbf{r}_1)(\mathbf{n}d\mathbf{r}_2)] e^{-i(\mathbf{n},\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\omega} d\mathbf{n} =$$

$$= \frac{e^2}{\pi}\,\omega^2 d\omega \iint [d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + (d\mathbf{r}_1\nabla_g)\,(d\mathbf{r}_2\nabla_g)]\,\frac{\sin g}{g}\, e^{i\omega(t_1-t_2)}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{g} = \omega\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Так как эффективные значения g велики по сравнению с единицей, то в (1) можно не дифференцировать $1/g$:

$$dI = \frac{e^2\omega d\omega}{\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{e^{i\omega(t_1-t_2)}}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\left[\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 - \frac{(\mathbf{V}_1,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,(\mathbf{V}_2,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2}\right]\sin g. \qquad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \int\limits_{t_2}^{t_1} \mathbf{V}(\tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{t_1-t_2} \mathbf{V}(t_2+\tau)\,d\tau. \qquad (3)$$

$\mathbf{V}(t_2+\tau)$ представляем в следующем виде:

$$\mathbf{V}(t_2+\tau) = \mathbf{V}_2\left(1 - \frac{\theta_\tau^2}{2}\right) + \vec{\theta}_\tau, \qquad \mathbf{V}_2\vec{\theta} = 0, \qquad (4)$$

$\vec{\theta}_\tau$ — угол многократного рассеяния за время τ.

(3) и (4) дают:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{V}_2 (t_1 - t_2) - \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \int\limits_0^{t_1-t_2} \theta_\tau^2 d\tau + \int\limits_0^{t_1-t_2} \vec{\theta}_\tau d\tau.$$

Пользуясь малостью θ и вводя переменные $T = t_2$, $t_1 - t_2 = t$, приводим (2) к виду

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dT \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\omega t} \times$$

$$\times \overline{\left[\frac{\left(\int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau\right)^2}{t^2} - \frac{\vec{\theta}_t \int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau}{t} \right] \sin \omega \left[Vt - \frac{\int\limits_0^t \theta_\tau^2 d\tau}{2} + \frac{\left(\int \vec{\theta}_\tau d\tau\right)^2}{2t} \right]}. \quad (5)$$

Черта означает усреднение по всем углам θ_τ. Если пренебречь θ_τ под знаком синуса, то из (5), пользуясь теорией многократного рассеяния [2], получим обычную формулу Б.-Г. в области $\omega \ll E$.

Теряемая в единицу времени в интервале $d\omega$ энергия равна

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\omega t} \overline{\left[\frac{\left(\int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau\right)^2}{t^2} - \frac{\vec{\theta}_t \int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau}{t} \right] \sin \omega \left[Vt - \frac{\int\limits_0^t \theta_\tau^2 d\tau}{2} + \frac{\left(\int \vec{\theta}_\tau d\tau\right)^2}{2t} \right]}. \quad (6)$$

Точное проведение усреднения в (6) затруднительно ввиду того, что усредняемая величина θ_τ входит под знаком синуса. Поэтому для оценки порядка величины мы заменим все члены в (6) в отдельности на их средние значения, пользуясь [2].

$$\overline{\int\limits_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_s^2 t\,|t|}{2E^2 L}; \quad \overline{\vec{\theta}_t \int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau} = \overline{\int\limits_0^t (\vec{\theta}_\tau + \vec{\varphi}, \vec{\theta}_\tau)\, d\tau} = \overline{\int\limits_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_s^2 t\,|t|}{2E^2 L};$$

$$\overline{\left(\int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau d\tau\right)^2} = 2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \overline{\vec{\theta}_\tau \vec{\theta}_\nu} d\nu = 2 \int\limits_0^t \overline{\theta_\nu^2} (t - \nu)\, d\nu = \frac{E_s^2 |t|^3}{3E^2 L}. \quad (7)$$

Пользуясь (7), мы имеем

$$dI \approx -\frac{e^2}{3\pi E^2} \frac{\omega d\omega}{L} E_s^2 \int\limits_0^\infty dt \cos \omega t \sin \omega\, V\left(t - \frac{E_s^2 t^2}{12E^2 L}\right) \approx$$

$$\approx \frac{e^2 \omega\, d\omega}{6\pi E^2 L} E_s^2 \int\limits_0^\infty dt \sin\left[(1 - V)\,\omega t + \frac{E_s^2 t^2 \omega}{12E^2 L}\right] = \frac{4d\omega}{3L} \int\limits_0^\infty dX \sin\left(X + \frac{E^2 X^2}{3E_0 \omega}\right), \quad (8)$$

$$E_0 = \frac{m^4 L}{E_s^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega \ll E^2/E_0$. Интеграл, входящий в (8), равен $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{3E_0\omega}{E^2}}$, dI оказывается порядка:

$$dI \approx \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{L} \sqrt{\frac{\omega E_0}{E^2}}. \quad (9)$$

Отсюда определяется число испущенных в единицу времени квантов в интервале частоты $d\omega$:

$$dN = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{E_0}{E^2 L^2}}. \quad (10)$$

Так как условие $\omega \ll E^2/E_0$ всегда будет удовлетворено для квантов достаточно малой энергии, то из (10) следует, что инфракрасная катастрофа в тормозном излучении никогда не имеет места, так как при $\omega \to 0$ спектр из $d\omega/\omega$ перестраивается в $d\omega/\sqrt{\omega}$. Полное число излученных квантов тем самым оказывается конечным.

Переходя к случаю, когда $\omega \sim E$, необходимо пользоваться квантовым рассмотрением. Точное проведение его связано с трудными вычислениями. Поэтому мы ограничимся только оценками, справедливыми по порядку величины.

В матричный элемент, определяющий излучение, входит существенным множителем выражение:

$$e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{K},\mathbf{r})}; \tag{11}$$

$\mathbf{p}$ — импульс электрона до излучения, $\mathbf{p}'$ — после него, $\mathbf{K}$ — импульс кванта. Учитывая малость углов между $\mathbf{K}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, рассмотрим сперва случай, когда они все параллельны. Разность $\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{K}$ равна $m^2K/2EE'$. Поэтому $r_{\text{эфф}}$ порядка

$$\frac{EE'}{m^2K}; \tag{12}$$

$\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ меняются из-за многократного рассеяния. Проекции $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ на направление $\mathbf{K}$ на расстоянии $r_{\text{эфф}}$ меняются на величину: $E\frac{E_s^2}{E^2}\frac{r_{\text{эфф}}}{L}$, $E'\frac{E_s^2}{E'^2}\frac{r_{\text{эфф}}}{L}$, соответственно. С учетом этого (11) приобретает вид

$$e^{i\frac{m^2r}{2EE'}K}\, e^{i\frac{r^2E_s^2K}{4EE'L}}. \tag{13}$$

$r_{\text{эфф}}$ равно:

$$\sqrt{\frac{LEE'}{E_s^2K}} = \frac{EE'}{m^2K}\sqrt{\frac{E_0K}{EE'}}, \tag{14}$$

если $E_0K/EE' \ll 1$, и равно (12), если $E_0K/EE' \gg 1$. Таким образом, если $E' < E_0$, $K \approx E$, то соответствующий акт излучения будет следовать Б.-Г. В противном случае матричный элемент будет меньше, чем у Б.-Г.

$$M = M_{\text{Б.-Г.}}\sqrt{\frac{E_0K}{EE'}}. \tag{15}$$

Вероятность испускания кванта данного направления приобретает вид:

$$W = W_{\text{Б.-Г.}}\frac{E_0K}{EE'}. \tag{16}$$

Однако телесный угол, в пределах которого испускаются кванты возрастает. Если угол между $\mathbf{K}$ и $\mathbf{p}$ равен ϑ, то в (11) появляется множитель $e^{iKr\vartheta^2/2}$. Согласно (14) этот множитель не будет уменьшать излучения вплоть до ϑ^2 порядка

$$\vartheta^2 \sim \frac{m^2}{EE'}\sqrt{\frac{EE'}{KE_0}} = \vartheta^2_{\text{Б.-Г.}}\sqrt{\frac{EE'}{KE_0}}. \tag{17}$$

(Выражение для ϑ^2 Б.-Г. легко получается из (12).)

Поэтому проинтегрированная по всем направлениям кванта вероятность излучения имеет вид:

$$A\,dK = dK\,A_{\text{Б.-Г.}}\sqrt{\frac{E_0K}{EE'}} \sim \frac{dK}{L}\sqrt{\frac{E_0}{EKE'}}. \tag{18}$$

Дифференциальное число квантов имеет минимум при $K=E/2$. Когда $E-K\sim E_0$, A переходит в выражение Б.-Г.

Полное число излученных квантов в единицу времени конечно и равно

$$\int_0^E A\,dK = a_e\frac{1}{L}\sqrt{\frac{E_0}{E}}, \quad a_e\sim 1. \tag{19}$$

Энергия I, излученная в единицу времени:

$$I=\int_0^E KA\,dK = \frac{b}{L}\sqrt{EE_0}=\frac{E}{L(E)}, \qquad b\sim 1. \tag{20}$$

Из (20) мы заключаем, что длина, на которой излучается энергия порядка E, растет с ростом энергии пропорционально $\sqrt{E}$. Потери энергии на единицу длины пропорциональны не E, как у Б.-Г., а $\sqrt{E}$. Проникающая способность электронов и позитронов растет, когда $E>E_0$. Вероятность образования пар γ-квантами в соответствии с (18) равна:

$$dA_\gamma=\frac{a_\gamma}{L}\sqrt{\frac{E_0}{E_+E_-K}}\,dE_+;\quad a_\gamma\sim 1;\quad E_+,\ E_->E_0. \tag{21}$$

Если $E_-, E_+\leqslant E_0$, то dA_γ переходит в выражение Б.-Г.

Интегрирование (21) дает полную вероятность образования пар A_γ за единицу времени:

$$A_\gamma=\frac{\pi a_\gamma}{L}\sqrt{\frac{E_0}{E}}. \tag{22}$$

Пробег квантов также растет пропорционально корню квадратному из энергии квантов.

Согласно (20) и (22), когда E/E_0, $K/E_0\sim 300-500$, пробег «мягкой компоненты» в веществах типа свинца становится равным 10—15 см и сравнивается с пробегом нуклонов большой энергии. При сверхвысоких энергиях мягкая компонента приобретает свойства жесткой компоненты.

Так как инфракрасная «катастрофа» отсутствует, то должны быть изменены выражения для радиационных поправок к различным процессам (упругому рассеянию электронов ядрами, комптон-эффекту, рассеянию электронов электронами), для которых важное значение имело существование инфракрасной катастрофы.

Поступило
22 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау, И. Померанчук, ДАН, 92, №3 (1953). [2] См., например, Б. Росси, К. Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, 1948, стр. 44.