Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО и А. БРОДСКИЙ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИИ С ВАКУУМОМ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 18 VI 1953)

Рассмотрим взаимодействие гравитационного поля с вакуумом скалярных или псевдоскалярных частиц (мезонов). Лагранжиан частиц вместе с членами связи можно взять в виде:

$$L = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\psi\right)+ + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}\left(\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\psi\right)-\frac{1}{2}m^2\psi^2 \quad (\hbar = c = 1). \qquad (1)$$

Из (1) следует уравнение движения в гейзенберговском представлении

$$S\psi \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}-m^2\psi = 0 \qquad (2)$$

и трехмерные перестановочные соотношения

$$\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\,L(\mathbf{r},t)}{\partial(\partial\psi/\partial x^0)},\ \psi(\mathbf{r}',t)\right] = \sqrt{-g}\ g^{\alpha 0}\left[\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^\alpha},\ \psi(\mathbf{r}',t)\right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$[\psi(\mathbf{r},t),\ \psi(\mathbf{r}',t)] = 0 \ \text{ и т. п.} \qquad (3)$$

Учитывая (1) и (2), можно представить L в виде

$$L = {}^1/_4\{\psi(x),\ S\psi(x)\} \qquad (4)$$

(фигурные скобки обозначают антикоммутатор).

Вводим одночастичный гриниан $G(x, x') = \langle P(\psi(x)\,\psi(x'))\rangle$ (ср. ([1])), где скобки обозначают среднее по вакууму частиц и P — оператор хронологического порядка; учитывая (3) и используя формулу для производных от разрывных функций ([2]), получаем для $G(x, x')$ уравнение

$$SG(x, x') = g^{\alpha 0}\left\langle\left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\alpha},\ \psi(x')\right]\right\rangle\delta(x_0 - x_0') = \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta(x - x'). \qquad (5)$$

Наличие дополнительного множителя $1/\sqrt{-g}$ в правой части (5) соответствует определению функции Грина в криволинейных координатах.

Теперь легко получить, что вакуумное значение лагранжиана L_0 (отсутствие реальных частиц!) равно

$$L_0 = {}^1/_2\,SG(x, x')\,|_{x'\to x}, \qquad (6)$$

где справа берется полусумма пределов $x' \to x$ при $x'^0 \gtrless x^0$. Так как тензор энергии может быть получен даже в отсутствие гравитационного поля при помощи вариации функции действия W по $g_{\alpha\beta}$, то мы рассмотрим вакуумное значение соответствующей величины

$$\langle \delta_{g_{\alpha\beta}} W\rangle_0 = \langle \int \delta_{g_{\alpha\beta}} (\sqrt{-g}L)\,(dx)\rangle_0 = \frac{1}{2}\int (\delta_{g_{\alpha\beta}} \sqrt{-g}\,S)\,G(x, x')\,|_{x'\to x}\,(dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\delta_{g_{\alpha\beta}}(\sqrt{-g}S))\cdot(\sqrt{-g}S)^{-1}\,\delta(x-x')\,|_{x'\to x}\,(dx) =$$

$$= \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{2\,(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\ln\sqrt{-g}\,S e^{ikx}\,(dx)\,(dk)\,. \qquad (7)$$

Рассматривая $\sqrt{-g}S$ как оператор в гильбертовом пространстве, можно записать $W_{\text{вак}}$ в виде

$$W_{\text{вак}} \equiv W_0 = {}^1/_2\,\mathrm{Sp}\,\ln\sqrt{-g}\,S + \mathrm{const} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\ln G + \mathrm{const}, \qquad (8)$$

где Sp (Spur) обозначает след в гильбертовом пространстве функций, обращающихся в нуль на бесконечности и представимых с помощью интеграла Фурье — Induced Планшереля. Из выкладок, приведших к (8), очевидно, что установленная теорема пригодна при соответствующей замене S для любых полей и частиц, в том числе для частиц полуцелого спина; для фермионов символ Sp включает также диагональное суммирование по спинорным индексам. Примем на время, что выполняется условие невозможности порождения реальных пар в вакууме гравитационным полем. Тогда из (7) находим, что

$$W_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \tau^{-1}d\tau\int e^{-ikx}e^{i\sqrt{-g}S\tau}e^{ikx}\,(dx)\,(dk). \qquad (9)$$

Подобная запись, основанная на введении параметра собственного времени (или пятой координаты, см. ([1])), обладает тем преимуществом, что все бесконечности, содержащиеся в теории, входят только при интегрировании по τ на нижнем пределе.

Перейдем к случаю слабого гравитационного поля и будем вести рассмотрение с точностью до второго порядка. В нашем случае оказывается более удобным использовать вместо обычно применяемых четырех условий Де-Дондера, переходящих в слабом поле в условия Гильберта — Лоренца ([2]), неинвариантное условие

$$\partial\sqrt{-g}\,/\,\partial x^\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \sqrt{-g} = \mathrm{const}. \qquad (10)$$

При этом условии мы имеем право, делая подстановку $\tau \to \sqrt{-g}\tau$, с точностью до постоянной записать

$$W_0 = \frac{1}{2\,(2\pi)^4}\int^\infty \exp(-im^2\tau)\,\tau^{-1}d\tau\int \exp(-ikx)\Big[\exp\Big(i\Big(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big)\tau\Big) -$$

$$- \exp\Big(ie_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\Big)\Big]\exp(ikx)\,(dx)\,(dk)\,. \qquad (11)$$

Учитывая соотношения для слабого поля $g_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ($e_{\alpha\beta} = 1, 1, 1, -1$) и т. д. и пользуясь свойством следа

$$\mathrm{Sp}\,AB = \mathrm{Sp}\,BA, \qquad (12)$$

мы можем под знаком интеграла в (11) вместо выражения в квадратных скобках подставить

$$i\tau \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta}\int\limits_0^1 \exp\left[i\left(e_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\lambda\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(g^{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\tau\right]d\lambda. \quad (13)$$

Как легко проверить, экспонента под знаком интеграла (13) подчиняется операторному интегральному уравнению

$$\exp\left[i\left(e_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\lambda\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(g^{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\tau\right]=\exp\left[i\tau e_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\right]+$$
$$+i\lambda\int\limits_0^\tau\left\{\exp\left[-ie_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}(\tau'-\tau)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(g^{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\exp\left[i\left(e_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\lambda\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(g^{\alpha\beta}-e_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\tau'\right]\right\}d\tau'. \quad (14)$$

Решая уравнение (14) с помощью итераций с точностью до $h_{\alpha\beta}$ и подставляя решение в (11), получаем для $W_{\text{вак}}$ в конце концов выражение (в рациональных единицах)

$$W_0=-\frac{m^2c^2}{3\cdot 2^9\cdot\pi\hbar}\int\limits_0^\infty s^{-2}e^{-s}ds\cdot\int(dx)\left[2\frac{\partial h_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial h_{\gamma\delta}(x)}{\partial x^\pi}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\pi}e_{\delta\nu}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial h_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial h_{\gamma\delta}(x)}{\partial x^\mu}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}e_{\mu\nu}\right]+$$
$$+\frac{\hbar}{2^7\cdot 15\pi^2}\int\limits_0^\infty s^{-1}e^{-s}ds\cdot\int(dx)\left[2\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\frac{\partial^2 h_{\gamma\delta}(x)}{\partial x^\pi\partial x^\theta}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\pi}e_{\delta\nu}e_{\mu\theta}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial h_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\frac{\partial h_{\gamma\delta}(x)}{\partial x^\pi\partial x^\theta}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}e_{\nu\pi}e_{\mu\theta}-\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\frac{\partial^2 h_{\gamma\delta}(x)}{\partial x^\pi\partial x^\theta}e_{\alpha\nu}e_{\beta\mu}e_{\gamma\pi}e_{\delta\theta}\right\}\Bigg]+$$
$$+\frac{\hbar^3}{15\cdot 2^8\cdot\pi^2m^2c^2}\int(dk)\int\limits_{-1}^1 dv\, v^2h_{\alpha\beta}(-k)\,h_{\gamma\delta}(k)\frac{1}{1+\frac{\hbar^2k^2}{4m^2c^2}(1-v^2)-i\varepsilon}\times$$
$$\times\left[v^4e_{\alpha\gamma}e_{\beta\pi}e_{\delta\nu}k_\pi k_\nu(k^2)^2-\frac{1}{2}v^4e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}(k^2)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{16}(3v^4-10v^2+15)\,e_{\alpha\theta}e_{\beta\pi}e_{\gamma\mu}e_{\delta\nu}k^2k_\theta k_\pi k_\mu k_\nu\right](\varepsilon\to+0). \quad (15)$$

При этом, поскольку мы ограничиваемся линейным приближением, условие (10) можно использовать в виде

$$\partial h(x)/\partial x^\alpha=0,\quad \text{или}\quad k_\alpha h(\pm k)=0 \quad (16)$$

всюду кроме рассмотрения линейного по h члена в $W_{\text{вак}}$, когда необходимо брать (10) с точностью до второго порядка по $h_{\alpha\beta}(x)$, что позволило нам свести получающийся линейный член в $W_{\text{вак}}$ к квадратичному. При этом сделана обычная подстановка $s\to -is$. Можно было бы с самого начала брать вместо разложения по $e^{+is\tau}$ разложение по $e^{+s\tau}$, не применяя условия невозможности порождения пар, но это привело бы к усложнению промежуточных вычислений. Первое слагаемое выражения (15) с точностью до линейно расходящегося множителя пропорционально функции действия свободного гравитационного поля W_G (при выполнении условия (16), см. [3]) и может быть исключено одновременным изменением масштаба измерения (перенормировкой) координат и «гравитационного заряда», роль которого играет масса покоя:

$$x_\nu \to \left(1 + \frac{km^2}{2\pi\hbar c}\frac{1}{6}\int_0^\infty s^{-2}e^{-s}ds\right)^{1/2} x_\nu,$$

$$m \to \left(\frac{1}{1 + \frac{km^2}{2\pi\hbar c}\frac{1}{6}\int_0^\infty s^{-2}e^{-s}ds}\right)^{1/2} m \tag{17}$$

(k — ньютоновская постоянная тяготения); при этом остальные слагаемые функции действия сохраняют свой прежний вид. Отметим, что из факта ренормировки гравитационного заряда следует различие полевых гравитационной и инертной масс элементарных частиц. Второе слагаемое в (15) пропорционально произведению обобщенного даламбертиана на W_G с точностью до расходящегося логарифмически коэффициента; для его изоляции с помощью ренормировки необходимо было бы наличие члена аналогичного вида с высшими производными в исходном эйнштейновском лагранжиане гравитационного поля. Отметим, что появление, в отличие от электродинамики, линейной расходимости в $W_{\text{вак}}$ обусловливается квадрупольным характером гравитационного поля. Учитывая условие (16), вакуумный добавок к действию гравитационного поля (15) можно переписать, заменив потенциалы $h_{\alpha\beta}(x)$ на «напряженности» поля $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}(x)$; отсюда сразу следует калибровочная инвариантность в смысле [2] полученного выражения и равенство нулю полевой массы гравитона.

Выражение (15) позволяет рассмотреть в первом неисчезающем порядке различные эффекты, связанные с поляризацией вакуума частиц гравитационным полем. В частности, из (15) с помощью обычного истолкования мнимой части функции действия получается вероятность порождения пар частиц гравитационным полем (обращающимся в $\pm\infty$ в нуль)

$$2\,\mathrm{Im}\,(W_0 + W_G) = -\frac{1}{2^6\pi\cdot 15}\int\limits_{-k^2 < 4m^2c^2/\hbar^2}(dk)\left(1 - \frac{4m^2c^2}{\hbar^2(-k^2)}\right)^{1/2} h_{\alpha\beta}(-k)\,h_{\gamma\delta}(k)\,\times$$
$$\times\left[\left(1 - \frac{4m^2c^2}{\hbar^2(-k^2)}\right)^2 e_{\alpha\gamma}e_{\beta\pi}e_{\delta\nu}k_\pi k_\nu k^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4m^2c^2}{\hbar^2(-k^2)}\right)^2 e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta}(k^2)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{m^2c^2}{\hbar^2(-k^2)} + 6\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2(-k^2)}\right)^2\right) e_{\alpha\theta}e_{\beta\pi}e_{\gamma\mu}e_{\delta\nu}k_\theta k_\pi k_\mu k_\nu\right]. \tag{18}$$

Отсюда нетрудно получить эффективное сечение порождения пар [4]. Отметим, что рассмотрение $W_{\text{вак}}$ в следующем приближении с необходимостью приводит к нелинейным вакуумным добавкам к лагранжиану гравитационного поля. Таким образом, наряду с аргументами общей теории относительности, нелинейность в уравнениях гравитационного поля любопытным образом с необходимостью индуцируется также квантовыми вакуумными поправками.

В заключение выражаем благодарность М. М. Мирианашвили за ценные замечания.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Schwinger, Phys. Rev., 82, №5, 664 (1951). [2] Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля, изд. 2-е, 1951. [3] А. А. Соколов, Вестн. МГУ, №9, 9 (1952). [4] А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, ч. II, § 5, М. — Л., 1952.