

М. И. КАДЕЦ

О ГОМЕОМОРФИЗМЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ БАНАХА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 VII 1953)

Настоящая заметка посвящена применению обобщения одной теоремы С. Н. Бернштейна ⁽¹⁾ к установлению топологического соответствия между некоторыми пространствами Банаха и, в частности, между пространством сходящихся числовых последовательностей s и пространством l .

Пусть в пространстве Банаха дана линейно-независимая полная система векторов

$$x_0, x_1, x_2, \dots, \quad (1)$$

причем для каждого элемента пространства уклонение

$$E_n[y] = \min_{\lambda_k} \left\| y - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k \right\| \quad (2)$$

достигается на единственном «полиноме»

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} x_k.$$

Такую систему в дальнейшем будем называть T -системой. Введем также обозначение $\|y\| = E_0[y]$ (уклонение от нульмерного подпространства).

Припишем каждому отличному от нуля $E_n[y]$ знак следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{sign } E_n[y] &= \text{sign } \lambda_{(n)}^{n+1} && \text{при } \lambda_{(n)}^{n+1} \neq 0, \\ \text{sign } E_n[y] &= \text{sign } E_{n+1}[y] && \text{при } \lambda_{(n)}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

(во втором случае, как легко видеть, $E_n[y] = E_{n+1}[y]$).

Лемма 1. Для любой последовательности действительных чисел, удовлетворяющей условиям

1) $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = 0$,

2) $|\alpha_{j-1}| \geq |\alpha_j|$,

3) если $|\alpha_{j-1}| = |\alpha_j|$, то $\alpha_{j-1} = \alpha_j$,

можно найти элемент y , для которого будет $E_j[y] = \alpha_j$.

Доказательство этой леммы, как и ее формулировка, почти дословно совпадает с доказательством теоремы С. Н. Бернштейна ⁽¹⁾.

Вопрос об единственности элемента y в общем случае остается открытым; этот вопрос пока остается открытым и для пространства S , т. е. в условиях теоремы С. Н. Бернштейна.

Можно показать, что совокупность элементов, определяемых своими уклонениями единственным образом, есть всюду плотное множество типа G_δ и, следовательно, II категории.

Будем говорить, что для данного пространства и данной в нем T -системы выполняется условие Бернштейна, если любой системе уклонений соответствует единственный элемент.

В частности, условие Бернштейна выполняется в пространстве $l^{(p)}$ ($p \geq 1$), если в качестве T -системы взять систему

$$\begin{aligned} \xi^{(0)} &= \{1, 0, 0, 0 \dots\}, \\ \xi^{(1)} &= \{0, 1, 0, 0 \dots\}, \\ \xi^{(2)} &= \{0, 0, 1, 0 \dots\}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 1. *Пространства, в которых выполняется условие Бернштейна, гомеоморфны.*

Для доказательства потребуется

Лемма 2. *Чтобы некоторое множество \mathfrak{M} элементов пространства Банаха, обладающего T -системой, было компактно, необходимо и достаточно, чтобы последовательность*

$$e_j = \sup_{y \in \mathfrak{M}} E_j[y] \quad (5)$$

сходилась к нулю.

Для доказательства необходимости условия допустим, что условие леммы не выполнено и, следовательно, существует последовательность элементов $y_k \in \mathfrak{M}$, для которых $E_{k_n}[y_{k_n}] > \varepsilon$. Выберем k_1 так, чтобы $E_{k_1}[y_0] < \varepsilon/2$, затем найдем $k_2 > k_1$ так, чтобы $E_{k_2}[y_{k_1}] < \varepsilon/2$; далее таким же способом определим k_3, k_4, k_5, \dots . Тогда

$$\|y_{k_m} - y_{k_n}\| \geq E_{k_m}[y_{k_m} - y_{k_n}] \geq E_{k_m}[y_{k_m}] - E_{k_m}[y_{k_n}] > \frac{\varepsilon}{2} \quad (m > n),$$

откуда следует, что исходное множество не компактно.

Чтобы доказать достаточность, зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и возьмем j так, чтобы $e_j < \varepsilon$. Если $y_j = \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k x_k$ — полином наилучшего приближения для элемента $y \in \mathfrak{M}$, то $\|y - y_j\| < \varepsilon$ и, следовательно, $\|y_j\| < e_0 + \varepsilon$. Множество элементов y_j ограничено и, в силу конечности, компактно. Значит, для любого ε исходное множество имеет компактную ε -сеть и, следовательно, компактно.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Пусть X и Y — пространства, удовлетворяющие условиям теоремы. Элементу $x \in X$ поставим в соответствие элемент $y \in Y$, обладающий той же системой уклонений, что и x . Полученное соответствие, очевидно, взаимно-однозначно.

Пусть x_1, x_2, \dots — сходящаяся к элементу x последовательность в X . Из леммы 2 следует, что соответствующая последовательность в Y компактна, а так как для каждой из ее предельных точек y $E_j[y] = E_j[x]$, то она может иметь лишь одну предельную точку, т. е. сходится. Следовательно, соответствие непрерывно. Так как пространства X и Y равносильны, теорема доказана.

Построим пространство числовых последовательностей, отличное от $l^{(p)}$, в котором выполняется условие Бернштейна. На множестве сходящихся к нулю числовых последовательностей введем метрику следующим образом: зададимся четной выпуклой функцией $M(\xi)$ ($-2 < \xi < 2$), для которой $M(0) = 0$; $M(\xi) > 0$ ($\xi \neq 0$); $\lim_{\xi \rightarrow 2} M(\xi) = \infty$,

и последовательностью чисел $a_k > 0$ таких, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Если теперь

$x = \{x_0, x_1, \dots\}$ есть сходящаяся к нулю числовая последовательность, то ее норму E_0 определим из уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k M\left(\frac{x_k}{E_0}\right) = M(1). \quad (6)$$

Введенная метрика эквивалентна обычной метрике пространства c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей, так как

$$\frac{1}{2} \max |x_k| < E_0[x] < \max |x_k|.$$

В этой метрике множество сходящихся к нулю последовательностей является банаховым пространством c_0^* .

Покажем, что в c_0^* выполняется условие Бернштейна, если в качестве T -системы взять последовательность (4). Для элемента $x = \{x_0, x_1, \dots\}$ уклонение $E_n[x]$ по абсолютной величине определяется как минимум по переменным ξ_k величины e_n в уравнении

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k M\left(\frac{x_k - \xi_k}{e_n}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k M\left(\frac{x_k}{e_n}\right) = M(1).$$

Очевидно, этот минимум достигается только при $\xi_j = x_j$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). Следовательно, последовательность (4) действительно есть T -система и $E_n[x]$ можно определить из уравнения

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k M\left(\frac{x_k}{E_n}\right) = M(1). \quad (7)$$

Знак уклонения E_n определится согласно условию (3):

$$\begin{aligned} \text{sign } E_n &= \text{sign } x_n && \text{при } x_n \neq 0, \\ \text{sign } E_n &= \text{sign } E_{n+1} && \text{при } x_n = 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь E_0, E_1, E_2, \dots — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям леммы 1.

Покажем, что существует единственный элемент, для которого

$$E_n[x] = E_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Так как $E_n[x]$ связано с компонентами x_0, x_1, x_2, \dots элемента x уравнением (7), то вопрос сводится к доказательству единственности решения следующей бесконечной системы уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 M\left(\frac{x_0}{E_0}\right) + a_1 M\left(\frac{x_1}{E_0}\right) + a_2 M\left(\frac{x_2}{E_0}\right) + \dots &= M(1), \\ a_1 M\left(\frac{x_1}{E_1}\right) + a_2 M\left(\frac{x_2}{E_1}\right) + \dots &= M(1), \\ a_2 M\left(\frac{x_2}{E_2}\right) + \dots &= M(1), \\ \dots & \end{aligned} \quad (8)$$

Требуемая единственность решения системы (8) может быть доказана, во всяком случае, при достаточно быстром стремлении к нулю коэффициентов a_k .

Итак, если коэффициенты a_k подчиняются определенным ограничениям, то полученное с их помощью пространство c_0^* гомеоморфно пространству l .

Так как c_0^* изоморфно c_0 , которое в свою очередь изоморфно $(^2)$ пространству c , то нами доказана

Теорема 2. *Пространства c и l топологически эквивалентны.*

Поступило
16 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Н. Бернштейн, С. Р., 206, 1520 (1938). ² С. С. Банах, Курс функционального анализа, 1948.