Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. И. ГРАЕВ

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ПЛАНШЕРЕЛЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VII 1953)

В заметке [1] был предложен метод, позволяющий весьма просто получать аналог формулы Планшереля для полупростых групп Ли. Этот метод был проиллюстрирован там на комплексных полупростых группах.

В данной заметке дается вывод аналога формулы Планшереля для вещественных групп Ли. Для наглядности рассматривается лишь случай группы G вещественных унимодулярных матриц.

Как уже упоминалось в [1], основой для получения аналога формулы Планшереля является решение следующей задачи. Пусть $x(g)$ — непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция на группе G, равная нулю вне малой окрестности единичного элемента группы. Требуется выразить значение $x(e)$ функции x в единице через интеграл этой функции по классу сопряженных элементов группы G.

Приведем решение этой задачи для группы G вещественных унимодулярных матриц n-го порядка. Как было отмечено в [1], нам удобнее всегда рассматривать многообразия нечетного числа измерений. Поэтому при нечетном n следует исходить не из группы G унимодулярных матриц, а из группы всех невырожденных матриц, имеющей нечетную размерность n^2. Переход в окончательной формуле для $x(e)$ снова к группе G не составляет при этом какого-либо труда.

Обозначим через G_k совокупность матриц группы G, имеющих k пар комплексно-сопряженных собственных значений. Тогда для функции $x(g)$ на группе G мы будем иметь

$$\int\limits_G x(g)\,dg = \int\limits_{G_0} x(g)\,dg + \int\limits_{G_1} x(g)\,dg + \ldots + \int\limits_{G_{\left[\frac{n}{2}\right]}} x(g)\,dg. \qquad (1)$$

С другой стороны, в матрице g «общего положения» из G_k с собственными значениями $e^{\tau_1 \pm i\varphi_1}, \ldots, e^{\tau_k \pm i\varphi_k}, e^{\tau_{k+1}}, \ldots, e^{\tau_{n-k}}$ можно всегда выбрать новую систему параметров, задающую g, которая включает в себя параметры $\tau_i \, (i = 1, \ldots, n-k)$ и $\varphi_j \, (j = 1, \ldots, k)$. Обозначив совокупность этих последних параметров через δ, а совокупность остальных параметров матрицы $g \in G_k$ через $\bar{g}_k$, мы будем иметь: $x(g) = x(\delta, \bar{g})$ на многообразии G_k и

$$\int\limits_{G_k} x(g)\,dg = \int x(\delta, \bar{g}_k)\,\omega_k(\delta, \bar{g}_k)\,d\bar{g}_k\,d\delta. \qquad (2)$$

Здесь ω_k — якобиан перехода к новым переменным.

Введем в рассмотрение функцию

$$I_\delta^{(k)} = \frac{1}{|D(\delta)|^{1/2}} \int x(\delta, \bar{g}_k)\, \omega_k(\delta, \bar{g}_k)\, d\bar{g}_k, \tag{3}$$

где $D(\delta)$ — дискриминант характеристического многочлена диагональной матрицы δ, т. е., если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы δ, $D(\delta) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$. Функция $I_\delta^{(k)}$ представляет собой функцию класса сопряженных элементов многообразия G_k. Таким образом, вместо одной функции I_δ, как это имело место для комплексных групп, мы получаем здесь $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ функций $I_\delta^{(k)}$. Это обстоятельство связано с тем, что вещественная группа имеет $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ различных типов классов сопряженных элементов, определяемых числом комплексных собственных значений у соответствующих матриц; каждому из этих типов классов сопряженных элементов отвечает своя функция $I_\delta^{(k)}$.

Формулу (2) можно теперь переписать в виде

$$\int_{G_k} x(g)\, dg = \int I_\delta^{(k)} |D(\delta)|^{1/2}\, d\delta. \tag{4}$$

Отметим, что если исходная функция $x(g)$ достаточное число раз дифференцируема и отлична от нуля лишь в малой окрестности единицы, то каждая из функций $I_\delta^{(k)}$ также достаточное число раз дифференцируема по своим переменным τ_i и φ_j.

Из формул (1) и (4) имеем

$$\int_G x(g)\, dg = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \int I_\delta^{(k)} |D(\delta)|^{1/2}\, d\delta, \tag{5}$$

где каждый из интегралов в правой части равенства берется по соответствующему многообразию.

Как и в ([1]), мы рассмотрим теперь какую-нибудь функцию $\varphi(g) = \varphi(\delta_g)$ класса сопряженных элементов, которая в окрестности единичной матрицы является с точностью до малых более высокого порядка невырожденной квадратичной формой от параметров матрицы $g' = g - e$. В качестве такой функции удобно взять

$$\varphi(g) = \mathrm{Sp}\, l^2,$$

где матрица l есть сумма ряда $l = (g - e) - \frac{1}{2}(g - e)^2 + \frac{1}{3}(g - e)^3 - \ldots$, сходящегося в окрестности единичной матрицы. В соответствии с (5) имеем

$$\int_G x(g)\, |\varphi(g)|^{\lambda/2}\, dg = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \int I_\delta^{(k)} |D(\delta)|^{1/2} |\varphi(\delta)|^{\lambda/2}\, d\delta = R(\lambda). \tag{6}$$

Найдем вычет каждого из интегралов в формуле (6) при $\lambda = -r$, где r — размерность рассматриваемой группы. Используя приведенные в ([1]) формулы, имеем

$$\underset{\lambda=-r}{\text{Выч}} \int_G x(g)\, |\varphi(g)|^{\lambda/2}\, dg = c\, x(e). \tag{7}$$

С другой стороны,

$$\underset{\lambda=-r}{\text{Выч}} \int I_\delta^{(k)} |D(\delta)|^{1/2} |\varphi(\delta)|^{\lambda/2} d\delta = \Delta_k \{I_\delta^{(k)} |D(\delta)|^{1/2}\}_{\delta=e}, \tag{8}$$

где Δ_k — однородный оператор дифференцирования по соответствующим переменным τ_i и φ_j, имеющий степень $n(n-1)$. Если $e^{\tau_{k+1}}, \ldots, e^{\tau_{n-k}}$ — вещественные собственные значения матрицы δ, оператор Δ_k симметричен относительно $\tau_{k+1}, \ldots, \tau_{n-k}$. Рассмотрим область $\tau_{k+1} \geqslant \tau_{k+2} \geqslant \ldots \geqslant \tau_{n-k}$. В этой области функция $|D(\delta)|^{1/2}$ выражается аналитически через параметры матрицы δ, причем это аналитическое выражение антисимметрично относительно $\tau_{k+1}, \ldots, \tau_{n-k}$. С другой стороны, функция $I_\delta^{(k)}$ симметрична по отношению к этим переменным. Ввиду сказанного, выражение (8) должно равняться нулю при $n-2k \geqslant 2$. Таким образом, согласно (6) и (7), $x(e)$ должно совпадать с точностью до постоянного множителя с вычетом

$$\underset{\lambda=-r}{\text{Выч}} \int I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]} |D(\delta)|^{1/2} |\varphi(\delta)|^{\lambda/2} d\delta.$$

Вычисляя это последнее выражение, мы получим окончательно:

$$x(e) = c_n L_n (I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]})_{\delta=e}. \tag{9}$$

Здесь L_n — линейный однородный дифференциальный оператор порядка $\frac{n(n-1)}{2}$, имеющий следующий вид:

$$L_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k-1} \left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right]\right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k-1} \left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau_i^2} + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau_i^2} + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)^2\right]\right\} \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial\varphi_i}$$

для группы матриц четного порядка $n \left(k = \frac{n}{2}\right)$;

$$L_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau_i} - \frac{\partial}{\partial\tau_j}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right)^2\right]\right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_i^2}\right) \frac{\partial}{\partial\varphi_i}$$

для группы матриц нечетного порядка $n \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Константы c_n могут быть легко подсчитаны.

Для окончательного вывода аналога формулы順 Планшереля для вещественной унимодулярной группы нам нужно теперь выразить интеграл $I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ через характеры представлений. В работе ([2]) было показано, что вещественная унимодулярная группа имеет $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ различных основных серий представлений $d_0, d_1, \ldots, d_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ *. При этом

---

* Наличие $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ различных типов представлений тесно связано с наличием такого же числа различных типов классов сопряженных элементов. Эта тесная связь имеет,

следы представлений типа d_0 выражаются через $I_\delta^{(0)}$, следы представлений серии d_1 — через $I_\delta^{(0)}$ и $I_\delta^{(1)}$ и т. д.; наконец, следы представлений серии $d_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ выражаются через $I_\delta^{(0)}, I_\delta^{(1)}, \ldots, I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. В силу полученного выше результата $x(e)$ выражается через $I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Из формул для следов мы сможем последовательно получить выражение $I_\delta^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ через следы представлений серий $d_0, d_1, \ldots, d_{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Таким образом, в выражение для $x(e)$, а значит, и в разложение регулярного представления на неприводимые, войдут все представления указанных серий.

Окончательное выражение $x(e)$ не через I_δ, а через следы представлений, будет проведено в другом месте вместе с формулами для следов.

Аналог формулы Separate Планшереля для $n = 2$ был по существу впервые получен Баргманом (3); см. также (4).

Поступило
30 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, ДАН, 92, № 2 (1953). [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, ДАН, 86, № 3 (1952); Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 3 (1953). [3] V. Bargmann, Ann. of Math., 48 (1947). [4] Harish-Chandra, Proc. Nat. Acad. Sci., 38 (1952). [5] Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 2, 1947.

вероятно, своей основой некоторую двойственность, существующую между алгеброй функций, постоянных на классах сопряженных элементов, и алгеброй представлений. Эта двойственность хорошо известна для конечных групп (см. (5)) и для компактных групп. По всей видимости, подобно тому, как наличие матриц с различным числом комплексных собственных значений дает различные основные серии представлений, наличие различных вырожденных серий представлений связано с тем, что, кроме классов сопряженных элементов «общего положения», существуют еще классы с другими жордановыми нормальными формами.