Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

ФИЗИКА

Э. Е. ВАЙНШТЕЙН

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАННОЙ ФУНКЦИИ ПОЧЕРНЕНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вольфковичем 25 VII 1953)

§ 1. Фотографический метод регистрации спектров является наиболее употребительным. Он широко используется в практике многочисленных спектральных и рентгено-спектральных лабораторий.

В большинстве случаев для определения относительных интенсивностей линий используется величина оптической плотности почернения $D = -\lg T$, где T — коэффициент пропускания, равный отношению светового потока, прошедшего сквозь эмульсию, к световому потоку, падающему на нее. Кривая, выражающая зависимость величины D от логарифма интенсивности линий, носит название характеристической кривой эмульсии. Она, как известно, имеет S-образный вид и лишь в пределах относительно узкой области изменения почернения, называемой областью нормальных экспозиций, может быть представлена прямой вида

$$D = \gamma \lg I - i_D.$$

Использование нелинейной характеристической кривой эмульсии для количественной фотометрии сопряжено с рядом неудобств и при всех условиях приводит к дополнительной затрате времени и уменьшению точности количественных определений отношения интенсивностей.

В связи с этим рядом авторов были сделаны попытки отыскать такую функцию коэффициента пропускания T, которая, в отличие от D, линейно зависела бы от $\lg I$ в широкой области изменения интенсивности — от очень малых значений этой величины до достаточно больших. Эти функции именуются обычно преобразованными функциями почернения. Их использование, как было показано рядом исследователей, позволяет значительно упростить и ускорить проведение спектральных [1] и рентгено-спектральных [2] анализов. В настоящее время предложено несколько отличающихся друг от друга по виду преобразованных функций почернения, позволяющих «спрямить» характеристические кривые эмульсии в пределах большего или меньшего по величине интервала изменения логарифма интенсивности.

В настоящей работе будет показано, что все эти выражения (без исключения) являются следствием одного общего уравнения для преобразованной функции почернения и естественно вытекают из него после тех или иных упрощений, осуществляемых с точностью до величин третьего порядка малости.

§ 2. Введем в рассмотрение функцию коэффициента пропускания P, имеющую вид:

$$P = \lg \frac{(1-T)^n}{T}. \quad (1)$$

Здесь $\frac{1-T}{T}$ — отношение светового потока, поглощенного в эмульсии, к потоку, прошедшему сквозь нее, а n — величина, в общем случае зависящая от энергии, поглощенной эмульсией за время экспозиции, и связанная с величиной $1-T$ соотношением

$$n=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i a_i}{(1-T)^i}, \tag{2}$$

в котором $a_0 \gg a_i$. Если ограничиться первыми тремя членами ряда (2) и для простоты положить $a_1=a_2=b$, то уравнение (2) с помощью несложных преобразований может быть приведено к виду

$$n\simeq a+\frac{b}{4}\left(\frac{T+1}{T-1}\right)^2, \tag{3}$$

где постоянная a равна $a_0-\frac{b}{4}$.

Так как $\ln T=2\left[\left(\frac{T-1}{T+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{T-1}{T+1}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{T-1}{T+1}\right)^n\right]$, то из уравнения (3) вытекает, что с точностью до величин третьего порядка малости

$$n\simeq a+\frac{b}{(\ln T)^2}, \tag{4}$$

и, следовательно,

$$n\simeq a+\frac{A}{D^2}, \tag{5}$$

где коэффициент $a \gg A$.

Легко показать, что уравнение (1), в котором n определяется уравнением (5), представляет собой обобщенное уравнение преобразованной функции почернения, так как оно заключает в себе все предложенные до сих пор и опубликованные в печати формулы для функций, «спрямляющих» характеристическую кривую эмульсии.

Это позволяет, во-первых, понять самый факт существования различных по виду функций преобразования; во-вторых, позволяет объективно оценить точность, с которой каждое из этих выражений способно «спрямлять» характеристическую кривую эмульсии, и наконец, в-третьих, позволяет объективно оценить широту интервала изменения интенсивностей, в пределах которого частные выражения для функции преобразования имеют силу и перекрываются.

Обратимся к анализу выражения (1). Полагая в нем $n=1$, получим

$$P=\lg\frac{1-T}{T},$$

где $\lg\frac{1-T}{T}$ — введенная впервые Сампсоном и Бекером [3,4] простейшая преобразованная функция почернения, позволяющая, как известно, в координатах W и $\lg I$ значительно расширить область нормальных экспозиций характеристической кривой эмульсии за счет области недодержек. Очевидно, что при достаточно малых значениях почернения, при которых вторым членом в выражении (5) уже нельзя пренебрегать, следует ожидать отступлений от прямолинейной зависимости между W и $\lg I$. Именно это и наблюдается на опыте [5].

Если считать, что коэффициент n в уравнении (1) отличается от единицы, но остается не зависящим от почернения, то уравнение (1) легко преобразуется к виду, который был предложен для P-преобразования Кайзером [6].

В самом деле, пусть $n = 1 - l$, где l — постоянная величина. Тогда из (1) получаем

$$P = W - l \lg (1 - T), \tag{6}$$

и так как $\lg (1 - T) = W - D$, то

$$P = W + l (D - W). \tag{7}$$

Само собой разумеется, что область применимости P-функции в виде (7) ограничена. Ее использование законно в той области почернений, для которой оправдано исходное предположение, что $dn/dD = 0$. При почернениях меньших, чем 0,15 — 0,1, это, повидимому, уже не имеет места.

Нетрудно показать, что в той же области почернений P-функция, определенная в виде (7), с точностью до произвольного знака совпадает с выражением, предложенным для преобразованной функции почернения Хьюгесом и Марфи ([7]). Действительно, полагая, так же как и раньше, n не зависящим от почернения и равным $(1 - l)$, разлагая $\lg (1 - T)$ в выражении (6) в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами ряда, включающими величины первых двух порядков малости, получаем из (1) уравнение

$$P = W + le^T - l, \tag{8}$$

которое лишь знаком отличается от функции $f(T)$, с которой работали Хьюгес и Марфи.

Наконец, если в формуле (7) положить $l = {}^1/_2$, можно получить преобразованную функцию почернения в виде

$$P = \frac{D + W}{2},$$

которая, как показали Хохерегер-Зом и Кайзер ([8]), «спрямляет» характеристическую кривую эмульсии в ультрафиолетовой области спектра. Все рассмотренные до сих пор уравнения получаются из (1) в предположении, что n не зависит от почернения линии, и поэтому, строго говоря, пригодны для тех областей, для которых D не очень мало, например, больше чем 0,1. В общем случае величина n зависит от D и приближенно может быть представлена, как мы видели, в виде

$$n = 1 - l + \frac{A}{D^2}.$$

Подставляя это значение для n в уравнение (1), получим, что

$$P = lS + (1 - l) W + \frac{A (D - W)}{D^2}, \tag{9}$$

которое тождественно уравнению, предложенному в свое время для области малых почернений Кайзером ([6]).

Институт геохимии и аналитической химии
им. В. И. Вернадского
Академии наук СССР

Поступило
18 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Прокофьев, Фотографические методы количественного спектрального анализа металлов и сплавов, ч. II, 1951. [2] Э. Вайнштейн, И. Шевалеевский, М. Кахана, Журн. аналит. хим., 1, 363 (1952). [3] R. Sampson, Monthly Notices R. A. S., 83, 174 (1923). [4] E. Baker, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 45, 166 (1924—25). [5] М. А. Блохин, Изв. АН СССР, сер. физ., 17, 224 (1953). [6] H. Kaiser, Spectrochemica Acta, 3, 501 (1949). [7] H. Hughes, R. Murphy, J. O. S. A., 39, 501 (1949). [8] M. Hoherjäger-Sohm, H. Kaiser, Spectrochemica Acta, 2, 396 (1944).