Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VII 1953)

М. Голомб рассмотрел в вещественном гильбертовом пространстве операторное уравнение

$$x + BF(x) = \Theta \quad (\|\Theta\| = 0)$$

и доказал его разрешимость ([1], теорема 9) в предположении, что B есть вполне непрерывный, самосопряженный и положительный оператор, а $F(x)$ есть непрерывный сильно потенциальный оператор, который удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Оператор $F(x)$ мы называем сильно потенциальным, если он является градиентом функционала $f(x)$, дифференцируемого в смысле Фреше, и потенциальным (или слабо потенциальным), если он является градиентом функционала $f(x)$, имеющего линейный дифференциал Гато [2].

В настоящей работе мы обобщаем теорему Голомба. Во-первых, мы доказываем, что в теореме Голомба можно отказаться как от требования непрерывности $F(x)$, так и от требования сильной потенциальности $F(x)$. Во-вторых, мы показываем, что в некоторых случаях можно отказаться как от требования вполне непрерывности оператора B, так и от требования положительности B. Данное нами доказательство отличается от доказательства М. Голомба и, как нам кажется, является более простым. В качестве приложения общих предложений мы рассматриваем вопрос о разрешимости некоторых систем нелинейных интегральных уравнений.

1. Пусть E — пространство Банаха, в котором всякое ограниченное множество слабо компактно Будем рассматривать в E слабо полунепрерывные функционалы $\varphi(x)$. Функционал $\varphi(x)$ называется слабо полунепрерывным снизу (сверху) в точке x_0, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к x_0, имеет место неравенство

$$\varphi(x_0) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \quad \left(\varlimsup_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leqslant \varphi(x_0)\right).$$

Если $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу и сверху, то он является слабо непрерывным. Для слабой непрерывности функционала $\varphi(x)$ достаточно, например, чтобы $\operatorname{grad}\varphi(x)$ был компактным [2]. Оператор, обратный градиенту, мы обозначим через grad^{-1}, т. е., если $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, то будем писать $f(x) = \operatorname{grad}^{-1} F(x)$. Приведем несколько примеров слабо полунепрерывных функционалов в гильбертовом пространстве H. Если B есть вполне непрерывный самосопряженный оператор, то $\operatorname{grad}^{-1} Bx = \frac{1}{2}(Bx, x) + C$ $(C = \text{const})$ есть слабо непрерывный функционал в H. Если A есть положительный самосопряженный оператор, заданный во всем H, то $\mathrm{grad}^{-1}Ax = {}^1/_2\,(Ax, x) + C$ есть слабо полунепрерывный снизу функционал в H. Данный функционал будет слабо непрерывным лишь тогда, когда A — компактный оператор. Если положительная часть спектра самосопряженного оператора T, заданного во всем H, произвольна, а отрицательная часть спектра состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность, то $\mathrm{grad}^{-1}Tx = {}^1/_2\,(Tx, x) + C$ есть слабо полунепрерывный снизу функционал, который будет слабо непрерывным лишь тогда, когда T есть компактный оператор.

2. Пусть ω есть ограниченное открытое множество в E, ω' — граница ω и $\overline{\omega} = \omega \cup \omega'$. Будем рассматривать всевозможные слабо замкнутые $\overline{\omega}$, на которых функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу. Если среди таких $\overline{\omega}$ существует хотя бы одно $\overline{\omega}_0$, что на ω'_0 $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, где x_0 есть какая-нибудь точка ω_0, то мы скажем, что функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством. Функционал, обладающий m-свойством по отношению к $\overline{\omega}$, достигнет на ω своей нижней грани. Назовем функционал $\varphi(x)$ слабо дифференцируемым на множестве $\sigma \subset E$, если в каждой точке σ он имеет линейный дифференциал Гато.

Лемма. *Если слабо дифференцируемый в E функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством, то существует точка $x_0 \in E$, в которой градиент $\varphi(x)$ обращается в нуль, т. е.*

$$\mathrm{grad}\,\varphi(x_0) = \Theta \quad (\|\Theta\| = 0).$$

3. Теорема 1. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы положительный самосопряженный оператор B и оператор $F(x) = \mathrm{grad}\, f(x)$, причем $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$2f(x) \leqslant a_1(x, x) + a_2(x, x)^\gamma + a_3, \tag{1}$$

где a_2 и a_3 — какие-нибудь положительные числа, $0 < \gamma < 1$, $0 < a_1\|B\| < 1$. Пусть далее выполнено одно из следующих условий: α) $f(x)$ есть непрерывный функционал, а B — компактный оператор; β) $f(x)$ есть слабо непрерывный функционал (или слабо полунепрерывный сверху). Тогда операторное уравнение $x = BF(x)$ разрешимо.

Для доказательства рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = (x, x) - 2f(Ax),$$

где A есть положительный корень квадратный из оператора B. Данный функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу, как сумма слабо полунепрерывного снизу функционала (x, x) и слабо непрерывного (или слабо полунепрерывного снизу) функционала $-2f(Ax)$. Далее, из неравенства (1) имеем

$$\varphi(x) \geqslant (x, x)^\gamma\,[(x, x)^{1-\gamma}(1 - a_1\|B\|) - a_2\|B\|^\gamma] - a_3,$$

т. е. функционал $\varphi(x)$ неограниченно растет вместе с $\|x\|$, ибо $1 - a_1\|B\| > 0$. Следовательно, существует сфера $\|x\| = r$, на которой $\varphi(x) > \varphi(\Theta)$, т. е. функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством. Так как $\varphi(x)$ есть слабо дифференцируемый функционал, то, согласно лемме, найдется точка $x_0 \in H$ такая, что $\mathrm{grad}\,\varphi(x_0) = \Theta$. Но $\mathrm{grad}\,(x, x) = 2x$ и $\mathrm{grad}\, f(Ax) = AF(Ax)$, откуда $x_0 - AF(Ax_0) = \Theta$ или $Ax_0 - A^2F(Ax_0) = \Theta$. Полагая $Ax_0 = z_0$ и учитывая, что $A^2 = B$, имеем $z_0 = BF(z_0)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если потенциальный оператор $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица
$\|F(x'') - F(x')\| \leqslant a_1\|x'' - x'\|$ $(a_1\|B\| < 1)$, то уравнение $x = BF(x)$

имеет единственное решение. Действительно, если x_1 и x_2 — два решения, то $\|x_2-x_1\| \leqslant \|B\| a_1 \|x_2-x_1\|$, так что $x_1 = x_2$.

Замечание 2. Условие (1) выполняется, если

$$(F(x), x) \leqslant a_1 (x, x) + c_1 (x, x)^\gamma,$$

где $0 < a_1 \|B\| < 1$, $0 < \gamma < 1$ и $(F(tx), x)$ есть суммируемая функция от t на $[0,1]$ при всяком $x \in H$. Действительно, по условию $\frac{d}{dt} f(tx) = (F(tx), x)$ есть суммируемая функция от t, а потому, согласно известной теореме анализа, $f(x) - f(\Theta) = \int\limits_0^1 (F(tx), x)\, dt$, где $f(\Theta) = a_3$ есть произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$f(x) \leqslant \frac{a_1}{2}(x, x) + \frac{c_1}{2\gamma}(x, x)^\gamma + a_3 = \frac{a_1}{2}(x, x) + a_2 (x, x)^\gamma + a_3.$$

4. Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Положительная часть спектра непозитивного самосопряженного оператора B, заданного во всем пространстве H, принадлежит (m, β), где $m > 0$, причем подпространство H_1, на которое оператор $P_1 = E(\Delta) = E_\beta - E_m$ (E_t — разложение единицы оператора B) проектирует H, имеет конечную размерность.*

2°. $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, *причем*

$$f(x) \geqslant \frac{1}{m}(x, x) + a_2 (x, x)^\gamma + a_3, \tag{2}$$

где a_3 и a_2 — какие-нибудь отрицательные числа, $0 < \gamma < 1$.

3°. *Либо $f(x)$ есть непрерывный функционал, а B — компактный оператор, либо $f(x)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал.*

Тогда операторное уравнение $x = BF(x)$ разрешимо.

Для доказательства рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = 2f(Ax) - ((x))^2,$$

где A есть главный квадратный корень из оператора B (т. е. $A = A_+ - A_-$, где A_+ есть положительный квадратный корень из положительной части оператора B, а A_- есть положительный квадратный корень из абсолютного значения отрицательной части оператора B), а $((x))^2 = \|P_1 x\|^2 - \|P_2 x\|^2$, где P_2 есть оператор проектирования на подпространство $H_2 = H \ominus H_1$. Функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу, как сумма двух таких функционалов, и слабо дифференцируем. Далее, из неравенства (2) мы находим, что

$$\varphi(x) \geqslant (x, x)^\gamma [(x, x)^{1-\gamma} + 2a_2 m^\gamma] + 2a_3.$$

Отсюда следует существование сферы $\|x\| = r$, на которой $\varphi(x) > \varphi(\Theta)$. Таким образом, слабо дифференцируемый функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством, а значит, согласно лемме, $\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \Theta$ или

$$AF(Ax_0) - (P_1 x_0 - P_2 x_0) = \Theta. \tag{3}$$

Так как $B_{\frac{1}{2}} A = B$ и $B_{\frac{1}{2}}(P_1 - P_2) = A$, где $B_{\frac{1}{2}}$ есть положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора B, то из равенства (3) находим $Ax_0 = BF(Ax_0)$ или $z_0 = BF(z_0)$. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 2 сохраняется, если положительная часть спектра оператора B произвольна, а отрицательная часть принадлежит $[\alpha, m]$, где $m < 0$ и $P_2 = E_m - E_\alpha$ проектирует H в конечномерное подпространство H_2. При этом в неравенстве (2) вместо m нужно писать $|m|$. Отметим, что к данной теореме можно придти, исходя из функционала $\varphi(x) = f(B_{\frac{1}{2}} x) - ((x))^2$.

5. В качестве приложения рассмотрим систему

$$u_i(x) = \int_D K_i(x, y) f_i(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy, \tag{4}$$

где D есть ограниченная область или измеримое множество m-мерного евклидова пространства; $i = 1, 2, \ldots, n$; $x, y \in D$; $K_i(x, y)$ суть действительные и симметричные функции, принадлежащие пространству $L_p(D \times D)$, $p \geqslant 2$; действительные функции $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ непрерывны по $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ $(-\infty < u_i < +\infty)$ и измеримы в D по x, причем $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} F(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$.

При помощи теоремы 1 мы приходим к предложению.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*:

1) *Каждое ядро $K_i(x, y)$ позитивно (т. е. положительно определенно или положительно полуопределенно), причем последовательность его вырожденных ядер (биортогональная формула) сходится к нему в $L_p(D \times D)$.*

2) *$hu = (h_1 u, h_2 u, \ldots, h_n u)$, где $h_i u = f_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$ есть непрерывный оператор с областью определения $L_{p,n}$ и областью значений в $L_{q,n}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (например [3], когда $|f_i(u_1, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{i=1}^{n} |u_i|^{p-1}$, где $a_i \in L_q$, $b > 0$).*

3)

$$2F(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \leqslant a_1 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_i|^{\alpha} + c(x), \tag{5}$$

где $0 < a_1 < \lambda_1$ (λ_1 наименьшее собственное число ядер $K_i(x, y)$), $0 < \alpha < 2$, $b_i(x) \in L_{\frac{2}{2-\alpha}}$, $c(x) \in L_1$. Тогда система (4) имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству $L_{p,n}$ и представимое в виде $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, где

$$\omega_i(x) = \sum_{\nu} \frac{\xi_{i\nu}}{\sqrt{\lambda_{i\nu}}} \varphi_{i\nu}(x)$$

($\varphi_{i\nu}(x)$ и $\lambda_{i\nu}$ суть собственные функции и собственные числа ядра $K_i(x, y)$).

Замечание 4. При помощи теоремы 2 легко установить существование решения системы (4), когда среди собственных чисел ядер $K_i(x, y)$ имеется конечное число положительных и произвольное число отрицательных или наоборот. При этом знак неравенства в (5) придется изменить на обратный, а положительное число $a_1/2$ будет иметь тот же смысл, что $1/m$ в неравенстве (2). Отметим еще, что вопрос о разрешимости в $L_{p,n}$ системы (4) был нами рассмотрен в работе [3] при меньших ограничениях на $K_i(x, y)$ и без предположения потенциальности оператора hu. Здесь, однако, мы получаем другие оценки для констант, входящих в различные неравенства, которые могут оказаться полезными.

Поступило
25 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Golomb, Math. Z., 39 (1934). [2] М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, 7, 4 (50) (1952). [3] М. М. Вайнберг, ДАН, 73, № 2 (1950).