

В. Т. БАЗЫЛЕВ

**КВАЗИ-ЛАПЛАСОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  $p$ -ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ПРОСТРАНСТВА  $P_n$**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 VII 1953)

1. Теория преобразований Лапласа является хорошо разработанной главой дифференциальной геометрии поверхностей трехмерного пространства. В последнее время эта теория была распространена различными авторами на случай  $p$ -сопряженных систем ( $p > 2$ ) проективного пространства  $P_n$ . Т. Л. Козьмина <sup>(1)</sup> посвятила свою диссертацию изучению преобразования Лапласа трижды сопряженной системы в трехмерном пространстве. Черн <sup>(2)</sup> обобщил преобразование Лапласа на случай картановских многообразий <sup>(3)</sup>, которые являются частным случаем  $p$ -сопряженных систем пространства  $n \geq 2p$  измерений. Р. В. Смирнов <sup>(4)</sup> построил и исследовал преобразования Лапласа  $p$ -сопряженных систем проективного пространства  $P_n$  ( $n \geq p$ ), обобщив таким образом результаты Т. Л. Козьминой и результаты Черна.

В настоящей работе рассматриваются преобразования, аналогичные преобразованиям Лапласа, но пригодные для  $p$ -мерных поверхностей, не являющихся  $p$ -сопряженными системами.

Легко заметить, что преобразования Лапласа  $p$ -сопряженных систем обладают следующими общими свойствами:

1) Через каждую точку  $A$   $p$ -сопряженной системы  $\Sigma_p$  проходит  $p$  попарно сопряженных касательных (т. е. столько, какова размерность многообразия), каждая из которых переводит поверхность  $\Sigma_p$  в одну из преобразованных поверхностей  $\Sigma'_p$ . Каждая из этих касательных несет  $p-1$  фокусов, описывающих преобразованные поверхности, которые в общем случае являются поверхностями такого же рода, что и исходная поверхность  $\Sigma_p$ .

2) Поверхность  $\Sigma_p$  и ее преобразование  $\Sigma'_p$  имеют в соответствующих точках общую  $(p-1)$ -мерную касательную плоскость.

3) Преобразованная поверхность  $\Sigma'_p$  несет в каждой точке  $p$  попарно сопряженных касательных, которые соответствуют  $p$  попарно сопряженным касательным поверхности  $\Sigma_p$ .

Общая  $(p-1)$ -мерная касательная плоскость проходит через все эти касательные на каждой поверхности, кроме той касательной, которая соответствует линии, огибаемой на второй поверхности общей касательной прямой  $AA'$  ( $A$  и  $A'$  — соответствующие точки поверхностей  $\Sigma_p$  и  $\Sigma'_p$ ).

4) Поверхность  $\Sigma'_p$ , являющуюся преобразованием поверхности  $\Sigma_p$ , можно снова подвергнуть такому же преобразованию, т. е. существует последовательность поверхностей, в которой каждая поверхность получается из соседней с помощью рассматриваемого преобразования.

2. Присоединим к  $p$ -мерной поверхности  $S_p$  пространства  $P_n$  семейство реперов первого порядка (5). Асимптотические формы поверхности имеют вид:

$$\Phi^\alpha = \omega^i \omega_j^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j \quad (i, j = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n).$$

Пусть  $q$  из форм  $\Phi^\alpha$  линейно независимы ( $q \leq \frac{1}{2}p(p+1)$ ). Если вершины репера  $A_{p+1}, \dots, A_{p+q}$ , присоединенного к точке  $A$  поверхности  $S_p$ , поместить в нормальной соприкасающейся  $q$ -плоскости, то формы  $\Phi^{p+1}, \dots, \Phi^{p+q}$  будут линейно-независимы, а  $\Phi^{p+q+1}, \dots, \Phi^n$  — тождественно равны нулю. Для того чтобы в каждой точке  $A$  поверхности  $S_p$  существовали  $p$  линейно-независимых попарно сопряженных направлений, необходимо и достаточно, чтобы асимптотические формы поверхности приводились одновременно к каноническому виду:

$$\Phi^a = \sum_i b_{ii}^a (\omega^i)^2 \quad (a = p+1, \dots, p+q).$$

В этом случае мы будем говорить, что поверхность несет  $p$ -мерную сопряженную сеть.

В этой работе рассматриваются преобразования, которые обладают свойствами 1), 2), 4) и не обладают свойством 3). Эти преобразования являются обобщением преобразований Лапласа и их можно назвать квази-лапласовыми преобразованиями. При этом мы ограничились в основном рассмотрением поверхностей, имеющих в каждой точке только две линейно-независимых асимптотических формы  $\Phi^{p+1}, \Phi^{p+2}$ , из которых  $\Phi^{p+2}$  неособенная, а все элементарные делители  $\lambda$ -матрицы

$$\|b_{ij}^{p+1} - \lambda b_{ij}^{p+2}\|$$

первой степени. В этом случае, как известно, существует проективное преобразование, которое приводит одновременно к каноническому виду форм  $\Phi^{p+1}, \Phi^{p+2}$ .

3. Поверхности  $S_3$  пространства  $P_5$  всегда имеют только две асимптотические формы (развертывающиеся поверхности исключаем). Если все элементарные делители  $\lambda$ -матрицы первой степени, то поверхность несет 3-мерную сопряженную сеть. При этом на каждой касательной  $AA_i$  к линиям сети имеется два фокуса  $A_i^j$  ( $j \neq i$ ), каждый из которых описывает поверхность  $\{A_i^j\}$ , вообще говоря, трехмерную, которая является квази-лапласовым преобразованием поверхности  $S_3$ . В самом деле, можно показать, что преобразование поверхности  $S_3$  в поверхность  $\{A_i^j\}$  обладает свойствами 1), 2), 4). Свойство 3) не имеет места, так как общая двумерная касательная плоскость поверхностей  $S_3$  и  $\{A_i^j\}$  содержит только одну касательную к линиям сети, а именно, касательную  $AA_i$ .

Если в каждой точке поверхности  $S_3$  пучок асимптотических конусов  $\Phi^4 - \lambda \Phi^5 = 0$  содержит одну сдвоенную плоскость, то такая поверхность расслаивается на  $\infty^1$  двумерных поверхностей  $S_2$ , каждая из которых лежит в своем 3-мерном проективном пространстве.

Квази-лапласовы преобразования такой поверхности  $S_3$  могут быть поверхностями одного из трех типов:

- а) поверхностями того же типа, что и исходная поверхность  $S_3$ ;
- б) поверхностями, расслаивающимися на  $\infty^1$  двумерных плоскостей;
- в) поверхностями, расслаивающимися на  $\infty^1$  двумерных поверхностей, каждая из которых во всяком случае лежит в своем 4-мерном пространстве.

4. Результаты  $n^\circ 3$  распространяются на  $p$ -поверхности пространства  $P_{p+2}$ . Таким же путем строятся квази-лапласовы преобразования поверхности  $S_p$  с двумерной нормальной соприкасающейся плоскостью в пространстве  $P_n$ ,  $n > p + 2$ . При этом оказывается, что такая поверхность в общем случае расслаивается на семейство  $(p-1)$ -мерных поверхностей  $S_{p-1}$ , каждая из которых лежит в своем  $p$ -мерном проективном пространстве. Этот результат является обобщением известной теоремы Серге (6) о многообразиях с одной асимптотической формой.

Среди указанных поверхностей имеются и поверхности  $S_p$ , которые, не являясь  $p$ -сопряженными системами, расслаиваются на семейство  $(p-1)$ -сопряженных систем. Среди квази-лапласовых преобразований поверхностей последнего типа найдутся, по крайней мере,  $(p-1)(p-2)$  поверхностей такого же типа, т. е. расслаивающихся на семейство  $(p-1)$ -сопряженных систем.

5. Если поверхность в каждой своей точке не допускает даже пары сопряженных направлений (т. е., в нашей терминологии, не несет даже двумерной сопряженной сети), то такую поверхность невозможно преобразовать в другую с помощью фокального семейства касательных прямых. Легко видеть, что если поверхность  $S_p$  несет  $p'$ -мерную сопряженную сеть ( $p' < p$ ) и имеет фокальные семейства касательных, то ее касательное преобразование не обладает не только свойством 3), но и свойствами 1), 2). Но при некоторых добавочных условиях на поверхность  $S_p$  все же существует последовательность касательных преобразований. Наконец, следует заметить, что для всякой гиперповерхности  $S_n$  ранга  $n$  пространства  $P_{n+1}$  существуют квази-лапласовы преобразования по любому из касательных направлений, не принадлежащих асимптотическому конусу.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность проф. С. П. Финикову, под непосредственным руководством которого выполнена эта работа.

Московский городской педагогический институт  
им. В. П. Потемкина

Поступило  
8 VII 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Т. Л. Козьмина, ДАН, 55, № 3 (1947). <sup>2</sup> S. Chern, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 30 (1944). <sup>3</sup> E. Cartan, Bull. Soc. Math. France, 47, 125 (1919); 48, 142 (1920). <sup>4</sup> Р. В. Смирнов, ДАН, 71, № 3 (1950). <sup>5</sup> С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. <sup>6</sup> И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 2, 1948.