

Г. С. ШПАК

**О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ АРГУМЕНТА АНАЛИТИЧЕСКОЙ
ФУНКЦИИ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 31 VII 1953)

1. Введем обозначения: N — класс функций

$$f(z) = b_0 + b_1 z + \dots, \quad |z| < 1,$$

регулярных в круге $|z| < 1$, не обращающихся в нуль и имеющих заданные коэффициенты b_0, b_1 ; B — класс функций $\omega(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условию $|\omega(z)| < 1$; α — аргумент числа $b_0 = f(0)$, значение которого фиксируем неравенством $-\pi < \alpha \leq \pi$. Для любой функции класса N мы имеем однозначно определенную по непрерывности функцию $\text{Arg } f(z)$ при $|z| < 1$.

Теорема 1. Для каждой функции $f(z) \in N$ имеет место неравенство

$$\sup_{|z| < 1} |\text{Arg } f(z)| \geq \rho_0, \quad (1)$$

где $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$ — наибольший корень уравнения

$$\frac{\pi}{4\rho_0} \left| \frac{b_1}{b_0} \right| = \cos \frac{\pi\alpha}{2\rho_0}. \quad (2)$$

Знак равенства в (1) при $b_1 \neq 0$ имеет место лишь для экстремальной функции

$$f^*(z) = b_0 \left\{ \frac{|b_0 b_1| + \overline{b_0} b_1 z e^{-i\lambda}}{|b_0 b_1| - \overline{b_0} b_1 z e^{i\lambda}} \right\}^{2\rho_0/\pi}, \quad \lambda = \frac{\pi\alpha}{2\rho_0}, \quad (3)$$

и при $b_1 = 0$ лишь для функции $f^*(z) = b_0$.

Доказательство. Если $|\text{Arg } f(z)|$ в круге $|z| < 1$ принимает сколь угодно большие значения, то неравенство (1) тривиально. Пусть $|\text{Arg } f(z)|$ в круге $|z| < 1$ есть ограниченная величина, точную верхнюю границу которой обозначим через ρ . Считая, что $f(z)$ не есть постоянная, будем иметь $\rho > |\alpha|$ и $|\text{Arg } f(z)| < \rho$ при $|z| < 1$.

Введем функцию

$$\varphi(z) = \left[\frac{f(z)}{|b_0|} \right]^{\pi/2\rho}; \quad (4)$$

она регулярна в круге $|z| < 1$, не обращается в нуль и $|\arg \varphi(z)| < \pi/2$ при $|z| < 1$. Очевидно, $\varphi(z)$ подчинена функции $\frac{1+z}{1-z}$, т. е. существует такая функция $\omega(z) \in B$, что

$$\varphi(z) = \left[\frac{f(z)}{|b_0|} \right]^{\pi/2\rho} = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}. \quad (5)$$

Полагая $\omega(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots$, получим

$$\alpha_0 = i \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{4\rho}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi b_1}{4\rho b_0} \operatorname{sc}^2 \frac{\pi\alpha}{4\rho}. \quad (6)$$

Как известно (1), для функций класса B выполняются условия

$$|\alpha_0| \leq 1, \quad |\alpha_1| \leq 1 - |\alpha_0|^2. \quad (7)$$

Из $\rho > |\alpha|$ следует $|\alpha_0| < 1$; второе условие приводит, согласно (6), к неравенству

$$\frac{\pi}{4\rho} \left| \frac{b_1}{b_0} \right| \leq \cos \frac{\pi\alpha}{2\rho} \quad (\rho > |\alpha|). \quad (8)$$

Легко видеть, что знак равенства имеет место при единственном значении $\rho = \rho_0(\alpha)$, удовлетворяющем условию $\rho_0(\alpha) > |\alpha|$; при $\rho < \rho_0$ указанное выше подчинение невозможно. Таким образом, мы должны иметь $\rho \geq \rho_0$, а это и есть неравенство (1).

Если $f(z) = \operatorname{const}$, то $b_1 = 0$, и утверждение очевидно. Знак равенства $\rho = \rho_0$ при $b_1 \neq 0$ имеет место, если во втором из неравенств (7) имеет место знак равенства, что, по теореме Шура (1), будет только в случае, когда

$$\omega(z) = \frac{\alpha_0(1 - |\alpha_0|^2) + \alpha_1 z}{1 - \overline{\alpha_0} \alpha_1 z} = \frac{\overline{b_0} b_1 z + i |b_0 b_1| \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{4\rho_0}}{|b_0 b_1| - i \overline{b_0} b_1 z \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{4\rho_0}}.$$

Пользуясь (4), получим экстремальную функцию (3). При $b_1 = 0$ утверждение об экстремальной функции очевидно.

Замечание. Если $f(z)$ имеет корни в круге $|z| < 1$, то при непрерывном изменении аргумента $f(z)$ вдоль путей, не проходящих через корни $f(z)$, этот аргумент может принимать сколь угодно большие значения.

2. Из (1) и (2) получаем оценку

$$\sup_{|z| < 1} |\arg f(z)| \geq \frac{\pi}{4} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|. \quad (9)$$

Случай $b_0 > 0$ был рассмотрен Г. Сегё (2), получившим оценку

$$\sup_{|z| < 1} |\arg f(z)| > \operatorname{arc} \sin \frac{|b_1|}{2b_0}.$$

Г. Сегё наложил на $f(z)$ дополнительное ограничение $\operatorname{Re} f(z) > 0$, при котором его оценка имеет смысл, ибо при этом по теореме Каратеодори $|b_1| < 2|b_0|$.

Пользуясь неравенством $\varphi < \frac{\pi}{2} \sin \varphi$ ($\varphi < \frac{\pi}{2}$), мы видим, что наша оценка (9) является более сильной, чем оценка Г. Сегё; кроме того она имеет место без дополнительных ограничений и является точной, ибо достигается для функции (3) при $b_0 > 0$, т. е. при $\lambda = 0$ и $\rho_0 = \frac{\pi}{4} \frac{|b_1|}{b_0}$.

3. Для функций класса N введем величину

$$\Delta(f) = \sup_{|z| < 1} \operatorname{Arg} f(z) - \inf_{|z| < 1} \operatorname{Arg} f(z), \quad (10)$$

которую естественно назвать вариацией $\operatorname{Arg} f(z)$ в круге $|z| < 1$. Точную нижнюю грань $\Delta(f)$ в классе N дает следующая теорема.

Теорема 2. Для $f(z) \in N$ справедливо неравенство

$$\Delta(f) \geq \frac{\pi}{2} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|; \quad (11)$$

знак равенства имеет место лишь для экстремальной функции

$$f^*(z) = b_0 \left\{ \frac{1 + e^{i\gamma} z}{1 - e^{i\gamma} z} \right\}^{\frac{1}{2} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|}, \quad (12)$$

где $\gamma = \arg \frac{b_1}{b_0}$.

Доказательство. Допустим, что для некоторой функции $f_1(z) \in N$ мы имели бы

$$\rho_1 \leq \text{Arg } f(z) \leq \rho_2, \quad |z| < 1, \quad (13)$$

причем $\rho_2 - \rho_1 < \frac{\pi}{2} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|$. Полагая $\beta = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$, мы имели бы для функций $f_2(z) = e^{-i\beta} f_1(z)$, также принадлежащей классу N , неравенство

$$\sup_{|z| < 1} |\arg f_2(z)| < \frac{\pi}{4} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|,$$

которое противоречит неравенству (1), ибо $\rho_0 \geq \frac{\pi}{4} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|$, что непосредственно следует из (2). Знак равенства в (11) имеет место только для функции, которую получаем из (3) при $\lambda = 0$ и $\rho_0 = \frac{\pi}{4} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|$.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность проф. Я. Л. Геронимусу за руководство и помощь, а также акад. В. И. Смирнову за ценные указания, позволившие значительно улучшить публикуемую работу.

Поступило
27 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ I. Schur, Z. f. reine u. angew. Math., 147, 205 (1917). ² G. Szegő, Math. Zs., 6, 167 (1920).