Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. ШЛИОНСКИЙ

О КОНЕЧНЫХ СУММАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 31 VII 1953)

Пусть S — класс функций $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$. Если, кроме того, рассматриваются только ограниченные функции $|f(z)|<M$, то функции такого вида образуют класс S_M, причем $S_M\subset S$ и $S_\infty=S$.

Рассматриваются конечные суммы:

$$\sigma_n(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n \quad (n=2,3,\ldots).$$

Сегё показал [1], что для функций класса S $\sigma_n(z)$ однолистны в круге $|z|<{}^1/_4$. Автор получил для функций класса S_M следующий результат:

Теорема. *Пусть $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ — функция класса S_M $(M\geqslant 3)$. Тогда конечные суммы $\sigma_n(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n$ $(n=2,3,\ldots)$ однолистны в круге $|z|>\frac{M}{4(M-1)}=r_M$.*

Константа r_M (для данного класса S_M) не может быть увеличена.

При $M<3$ вопрос остается открытым. При $M\to\infty$ получается результат Сегё.

Доказательство. Последнее утверждение теоремы устанавливается с помощью функции

$$M\frac{(1-z)\sqrt{M}-\sqrt{M(1-z)^2-4z}}{(1-z)\sqrt{M}+\sqrt{M(1-z)^2-4z}}=z+2\left(1-\frac{1}{M}\right)z^2+\ldots,$$

для которой

$$\sigma_2^1\left(-\frac{M}{4(M-1)}\right)=0.$$

Для доказательства однолистности $\sigma_n(z)$ достаточно установить

$$\frac{\sigma_n(z_1)-\sigma_n(z_2)}{z_1-z_2}\neq 0,\quad |z_1|<r_M,\quad |z_2|<r_M. \qquad (1)$$

При $n=2$ и $n=3$ (1) устанавливается по схеме Сегё [1] с учетом того, что формулы Лёвнера [2] для функции класса S_M имеют вид

$$c_2=-2\int_0^{\ln M}e^{-t}k(t)\,dt,$$

$$c_3=4\left(\int_0^{\ln M}e^{-t}k(t)\,dt\right)^2-2\int_0^{\ln M}e^{-2t}k^2(t)\,dt.$$

При этом получены оценки:

$$|c_2| \leqslant 2\left(1-\frac{1}{M}\right); \quad Rc_3 \leqslant 3-\frac{8}{M}+\frac{7}{M^2} \quad (M>2).$$

При $n \geqslant 4$ вместо (1) достаточно установить неравенство

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| > \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \frac{z_1^\nu - z_2^\nu}{z_1-z_2}\right|; \tag{2}$$

$$|z_1| < r_M; \quad |z_2| < r_M \quad (n=4, 5, \ldots).$$

С помощью неравенств [3]

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqslant \prod_{i=1}^{2} \frac{|f(z_i)|\sqrt{1-|z_i|^2}}{|z_i|\sqrt{1-\frac{1}{M^2}|f(z_i)|^2}}$$

и [4]

$$|f(z)| \geqslant M\frac{(1+|z|)\sqrt{M}-\sqrt{M(1+|z|)^2-4|z|}}{(1+|z|)\sqrt{M}+\sqrt{M(1+|z|)^2-4|z|}}$$

можно получить неравенство

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \geqslant \frac{256(M-1)^2(15M^2-32M+16)}{15M-4+\sqrt{25M^2-56M+32}},$$

причем правая часть возрастает с возрастанием M. Отсюда следует:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| > \begin{cases} \dfrac{5632}{17661} & \text{при } 3 \leqslant M \leqslant 4; \\ \dfrac{1}{3} & \text{при } M \geqslant 4. \end{cases} \tag{3}$$

Обратимся теперь к оценке правой части (2). Простыми геометрическими рассуждениями можно притти к неравенству

$$1+\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |c_\nu|^2 \leqslant M^2,$$

откуда

$$|c_\nu| < \frac{M}{\sqrt{\nu}} \leqslant \frac{M}{\sqrt{5}} \quad (\nu=5, 6, \ldots).$$

Учитывая это, получаем:

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \frac{z_1^\nu - z_2^\nu}{z_1-z_2}\right| \leqslant \sum_{\nu=5}^{\infty} |c_\nu| \nu r_M^{\nu-1} < \frac{M}{\sqrt{5}} \sum_{\nu=5}^{\infty} \nu r_M^{\nu-1} =$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{5}} \frac{4M^6-5M^5}{(3M-4)^2(M-1)^3} = X(M).$$

$X(M)$ принимает наименьшее значение при $M=M_0$, $4<M_0<5$. Оценивая $X(M)$ при $M=3$ и $M=20$, легко получить:

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \frac{z_1^\nu - z_2^\nu}{z_1-z_2}\right| < \begin{cases} \dfrac{1701}{6400} & \text{при } 3 \leqslant M \leqslant 4; \\ \dfrac{1}{3} & \text{при } 4 \leqslant M \leqslant 20. \end{cases} \tag{4}$$

При $M \geqslant 20$ можно ограничиться оценками для функций класса S [1, 5]:

$$|c_\nu| < {}^3/_4\, e\nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots;$$

$$|c_5| < 8.$$

Тогда имеем:

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \frac{z_1^\nu - z_2^\nu}{z_1 - z^2}\right| < 40 r_M^4 + \frac{3}{4} e \sum_{\nu=6}^{\infty} \nu^2 r_M^{\nu-1} =$$

$$= 40\, r_M^4 + \frac{3}{4} e \frac{36 r_M^5 - 83 r_M^6 + 45 r_M^7}{(1 - r_M)^3} = Y(M).$$

$Y(M)$ убывает с возрастанием M. При $M = 20$ $r_M = {}^5/_{19}$ и $Y(M) < {}^1/_3$. Значит,

$$Y(M) < {}^1/_3 \text{ при } M \geqslant 20.$$

Сравнивая (4) и (5) с (3), легко получим (2).

Поступило
3 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Szegö, Math. Ann., 100 (1928). [2] Г. М. Голузин, Усп. матем. наук, (1939). [3] И. Базилевич, Матем. сборн., 28 (70) : 2 (1951). [4] R. Nevanlinna, Overs. av Finska Vetensc. Förh., 62 (1917). [5] Г. М. Голузин, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 17 (1949).