Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. К. ФАДДЕЕВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ В ГРУППАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VIII 1953)

1. Формулировка теоремы и некоторых ее следствий. Настоящая заметка является продолжением статьи [1]. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа; $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа конечного индекса ν; $\mathfrak{a}$ — аддитивно записанная $\mathfrak{G}$-операторная абелева группа. Предполагается, что в $\mathfrak{a}$ возможно и однозначно деление на ν. Группа $\mathfrak{a}$ естественным образом может рассматриваться и как $\mathfrak{H}$-операторная группа. Через $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, $C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, $Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, $Z^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, $B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, $B^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$, $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ обозначаются, соответственно, группы цепей, циклов, границ и гомологий групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{a}$. Целью работы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *$H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ содержит прямое слагаемое $H^n_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, изоморфное $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Изоморфизм $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ на $H^n_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ порождается „оператором ограничения“ μ, сопоставляющим каждой цепи $F \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ цепь $\mu F \in C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ согласно формуле*

$$(\mu F)_{y_1, y_2, \ldots, y_n} = F_{y_1, y_2, \ldots, y_n}; \quad y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{H}.$$

Непосредственными следствиями из теоремы 1 являются следующие теоремы:

Теорема 2. *Если $\mathfrak{a}$ есть периодическая (в частности, конечная) $\mathfrak{G}$-операторная абелева p-группа, $\mathfrak{G}$ — конечная группа и $\mathfrak{H}$ — ее силовская p-подгруппа, то $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx H^n_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, где $H^n_0(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ — прямое слагаемое в $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$.*

Действительно, в рассматриваемом случае $(\nu, p) = 1$ и, следовательно, в p-группе $\mathfrak{a}$ деление на ν возможно и однозначно.

В частности, при $n = 2$ получаем, что группа расширений $\mathfrak{a}$ посредством $\mathfrak{G}$ изоморфна некоторому определенному прямому слагаемому группы расширений $\mathfrak{a}$ посредством силовской p-подгруппы $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$.

Далее:

Теорема 3. *Если $\mathfrak{G}$ — конечная группа, $\mathfrak{H}_p$ — ее силовские p-подгруппы, $\mathfrak{a}$ — произвольная $\mathfrak{G}$-операторная периодическая абелева группа, то*

$$H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx \sum_p H^n_0(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a}),$$

где $H^n_0(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a})$ — некоторые прямые слагаемые группы $H^n(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_p$ — p-компоненты $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_p$, и, следовательно (см., например, [2]), $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx \sum_p H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}_p)$. В силу теоремы 2,

$$H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}_p) \approx H_0^n(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a}_p) \approx H_0^n(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a}).$$

Теорема 3 верна не только для периодических групп $\mathfrak{a}$. В частности:

Теорема 4. *Если $\mathfrak{a}$ — единичная окружность с тождественными операторами, $\mathfrak{G}$ — конечная группа, то*

$$H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx \sum_p H_0^n(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a}).$$

Действительно, $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}')$, где $\mathfrak{a}'$ — аддитивная группа рациональных чисел по модулю 1. Отсюда справедливость теоремы следует непосредственно, ибо $\mathfrak{a}'$ — периодическая группа.

В частности, теорема 4 верна для мультипликатора Шура ($n = 2$).

Теорема 5. *Если $\mathfrak{a}$ есть решетка (прямая сумма бесконечных циклических групп), $\mathfrak{G}$ — конечная группа и $n \geqslant 2$, то*

$$H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx \sum_p H_0^n(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a}).$$

Доказательство. Погрузим решетку $\mathfrak{a}$ в линейное пространство $\mathfrak{b}$ над полем рациональных чисел и распространим естественным образом операторы из $\mathfrak{G}$ на все пространство $\mathfrak{b}$. Тогда, ввиду того, что в $\mathfrak{b}$ возможно и однозначно деление на любое целое число, $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}) \approx H^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ и $H^n(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{a}) \approx H^{n-1}(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ (теоремы 1 и 4 из [3]). Но $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ есть периодическая группа, следовательно, $H^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \approx \sum_p H_0^{n-1}(\mathfrak{H}_p, \mathfrak{b}/\mathfrak{a})$, что и доказывает теорему.

Отдельным рассуждением можно убедиться в справедливости теоремы и для $n = 1$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{G} = \sum \rho = \sum \mathfrak{H}\bar{\rho}$ — разложение $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$, $\bar{\rho}$ — фиксированный набор представителей из классов смежности ρ, причем $\rho_0 = \mathfrak{H}$, $\bar{\rho}_0 = 1$. Обозначим, следуя [1], через $\mathfrak{j}$ группу функций, определенных на классах смежности ρ со значениями из $\mathfrak{a}$. В $\mathfrak{j}$ вводятся операторы из $\mathfrak{G}$ по формуле:

$$f^x(\rho) = [f(\rho x^{-1})]^x, \quad x \in \mathfrak{G}.$$

„Константные“ функции f_a со значениями $f_a(\rho) = a \in \mathfrak{a}$ образуют допустимую подгруппу $\mathfrak{a}_1$ группы $\mathfrak{i}$, операторно изоморфную $\mathfrak{a}$.

Укажем важный для дальнейшего гомоморфизм „усреднения“ σ группы $\mathfrak{i}$ в $\mathfrak{a}$, определенный равенством

$$\sigma f = \frac{1}{\nu} \sum_\rho f(\rho).$$

Правая часть имеет смысл, ибо в группе $\mathfrak{a}$ возможно и однозначно деление на ν. Гомоморфизм σ операторный, ибо

$$\sigma(f^x) = \frac{1}{\nu} \sum_\rho f^x(\rho) = \left[\frac{1}{\nu} \sum_\rho f(\rho x^{-1})\right]^x = (\sigma f)^x).$$

Если f_a есть константная функция со значением a, то $\sigma f_a = a$. Для дальнейшего нам удобнее рассматривать σ как гомоморфизм $\mathfrak{j}$ на $\mathfrak{a}_1$, считая σf равным константной функции, значения которой равны σf в прежнем смысле. Обозначим через $\mathfrak{b}$ подгруппу $\mathfrak{i}$, составленную из функций, для которых $\sigma f = 0$.

Ясно, что $\mathfrak{i} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}$, причем сумма прямая и обе подгруппы $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}$ допустимые. Следовательно ([2], лемма 5), $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j}) \approx H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}_1) + H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$.

Точнее, каждый цикл F из $Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$ есть сумма циклов из $Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}_1)$ и $Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ и $F \in B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$ в том и только в том случае, если его составляющие принадлежат, соответственно, $B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a}_1)$ и $B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$.

Далее, в силу теоремы 1 из [1], $H^n(\mathfrak{E}, \mathfrak{j}) \approx H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, причем изоморфизм порождается оператором ограничения η, отображающим $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$ в $C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ по формуле $(\eta F)_{y_1, y_2, \ldots, y_n} = F_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(\rho_0)$.

Очевидно, что применение естественного изоморфизма $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{a}_1$ и затем „оператора ограничения“ η равносильно применению „оператора ограничения“ μ, описанного при формулировке теоремы 1.

Тем самым теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Циклы, образующие классы гомологий, составляющие $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, суть те и только те, которые продолжимы до циклов из $Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$. Обозначим их совокупность через $Z_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$. Из теоремы 1 следует, что каждый цикл из $Z_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ продолжим, с точностью до границ, единственным способом.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно указать оператор, порождающий „проектирование“ группы $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ на $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$.

Изоморфизм $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ на $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$ порождается оператором продолжения E (см. [1], 4°). Отображение $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{j})$ на $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ порождается оператором σ и, наконец, отображение $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{a})$ на $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ порождается оператором ограничения μ.

Следовательно, отображение $H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ на $H_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$ порождается оператором $\alpha = \mu\sigma E$.

Нетрудно дать формулу для действия этого оператора на цепи из $C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, исходя из формул (2), (3) и (4) работы [1] и определений σ и μ.

Именно, если $F \in C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, то

$$(\alpha F)_{y_1, y_2, \ldots, y_n} = \frac{1}{\nu} \sum_{\rho} F_{\overline{\rho y_n^{-1} \ldots y_1^{-1}}\; y_1\; \overline{\rho y_n^{-1} \ldots y_2^{-1}}^{\,-1} \;\ldots\; \overline{\rho y_n^{-1}}\; y_n\; \overline{\rho}^{\,-1}}.$$

Из определения α непосредственно ясно, что для того, чтобы $F \in Z_0^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$, необходимо и достаточно, чтобы $F - \alpha F \in B^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{a})$.

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступило
24 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. К. Фаддеев, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, № 1, 17 (1952). [2] З. И. Боревич, там же, **16**, № 4, 365 (1952). [3] Д. К. Фаддеев, ДАН, **58**, № 3 (1947).