

ЛИ ЕН ПИР

О ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 VII 1953)

Функцию  $f(z)$ , регулярную в некоторой области  $B$ , содержащей отрезки вещественной оси, мы называем типично вещественной <sup>(1)</sup> в области  $B$ , если она вещественна на этих отрезках, а в остальных точках области такова, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) > 0 & \text{ при } \operatorname{Im}(z) > 0; \\ \operatorname{Im}(f(z)) < 0 & \text{ при } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через  $T_q$  класс функций

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots,$$

регулярных в круговом кольце  $R_q$ ,  $q < |z| < 1$ , непрерывных вплоть до  $|z| = q$  и имеющих чисто вещественную величину на окружности  $|z| = q$ , типично вещественных в  $R_q$  и подчиненных условию

$$a_1 - a_{-1} = 1. \quad (2)$$

Чтобы получить параметрическое представление функции  $f(z) \in T_q$ , нужно отметить следующую лемму 1, которую можно доказать так же, как лемму в работе <sup>(2)</sup>.

Лемма 1. Если функция  $f(z)$  регулярна в кольце  $R_q$ , непрерывна в замкнутом кольце  $R_q$  и имеет на окружности  $|z| = q$  мнимую часть, равную постоянной  $C$ , то справедливо интегральное представление

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(z')) K_q(zz'^{-1}) d\theta + D, \quad z' = e^{i\theta}, \quad (3)$$

где

$$K_q(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta} - \frac{1+q^{2\nu}\zeta^{-1}}{1-q^{2\nu}\zeta^{-1}} \right),$$

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(z')) d\theta, \quad z' = e^{i\theta}.$$

Кроме того имеем

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(z')) d\theta, \quad z' = e^{i\theta}.$$

Теорема 1. Для любой функции  $f(z) \in T_q$  в кольце  $R_q$  справедливо интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi S_q(z, \cos \theta) d\alpha(\theta) + a_0, \quad (4)$$

где положено

$$S_q(z, \cos \theta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu} z}{1 - 2 \cos \theta q^{2\nu} z + q^{4\nu} z^2}, \quad (5)$$

$\alpha(\theta)$  — некоторая вещественная неубывающая ограниченная функция в промежутке  $[0, \pi]$ , причем  $\alpha(\pi) - \alpha(0) = \pi$ . Обратно, всякая функция, представимая в кольце  $R_q$  формулой (4), принадлежит классу  $T_q$ .

Доказательство. Пусть  $f(z) \in T_q$ . Возьмем любое число  $q_1$ ,  $q < q_1 < 1$ . Из леммы 1 имеем

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(z')) K_{q_1'}(z, z'^{-1}) d\theta + D, \quad (6)$$

где  $z' = q_1 e^{i\theta}$ ,  $q < |z| < q_1$ ,  $q_1' = \frac{q}{q_1}$ ,  $D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(z')) d\theta$ .

В силу принципа симметрии, легко получаем из (6)

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{Im}(f(z')) \frac{i}{2} [K_{q_1'}(zz'^{-1}) - K_{q_1'}(z\bar{z}'^{-1})] d\theta + a_0.$$

Отсюда получаем

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2q_1^{-1} \operatorname{Im}(f(z')) \operatorname{Im}(z') S_{q_1'}(q_1' z, \cos \theta) d\theta + a_0, \quad (7)$$

где  $S_q(z, \cos \theta)$  определяется формулой (5).

Теперь вводим новую функцию:

$$\alpha_{q_1}(\theta) = \int_0^\theta 2q_1^{-1} \operatorname{Im}(f(z')) \operatorname{Im}(z') d\theta, \quad z' = q_1 e^{i\theta}.$$

Эта новая функция есть вещественная неубывающая в  $[0, \pi]$  в силу условия (1).

Так как  $\overline{f(z')} = f(\bar{z}')$ ,  $z' = q_1 e^{i\theta}$ , то имеем

$$\alpha_{q_1}(\pi) = \frac{q_1^{-1}}{2} \left( \int_0^{2\pi} f(\bar{z}') z' d\theta - \int_0^{2\pi} f(z') z' d\theta \right),$$

и отсюда получим

$$\alpha_{q_1}(\pi) = (q_1 a_1 - q_1^{-1} a_1) \pi.$$

Ясно, что семейство функций  $\{\alpha_{q_n}(\theta)\}$  равномерно ограничено в промежутке  $[0, \pi]$  относительно  $q_1$ ,  $q < q_1 < 1$ , и последовательность полных изменений этих функций также ограничена. Следовательно, по теореме Хелли можно выбрать такую последовательность  $\{q_n\}$ ,  $q < q_n < 1$ ,  $q_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , чтобы последовательность функций

$$\alpha_{q_1}(\theta), \alpha_{q_2}(\theta), \dots, \alpha_{q_n}(\theta), \dots$$

сходилась к некоторой вещественной неубывающей функции  $\alpha(\theta)$  для

всех точек из  $0 \leq \theta \leq \pi$ , за исключением не более счетного множества точек, т. е.

$$\alpha(\theta) = \lim_{q_n \rightarrow 1} \int_0^\theta 2q_n^{-1} \operatorname{Im}(f(q_n e^{i\theta})) \operatorname{Im}(q_n e^{i\theta}) d\theta, \quad (8)$$

причем  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(\pi) = (a_1 - a_{-1})\pi = \pi$ .

Заменяя в (7)  $q_1$  на  $q_n$ , удовлетворяющие формуле (8), интегрируя по частям и заставляя  $q_n$  стремиться к 1, на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \alpha(\pi) S_q(z, \cos \theta) \Big|_{\theta=\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} S_q(z, \cos \theta) d\theta + a_0.$$

Обратное интегрирование по частям даст искомую формулу (4). Обратное утверждение теоремы очевидно, поскольку функция  $S_q(z, \cos \theta)$  сама является типично вещественной в кольце  $R_q$ .

Исходя из теоремы 1, легко получаем ряд теорем об оценках:

**Теорема 2.** Для функции  $f(z) \in T_q$  при заданном  $z \in R_q$  справедлива точная оценка

$$|f(z)| \leq |S_q(z, \cos \theta_0) + a_0|,$$

где  $\theta_0$  — некоторое значение из промежутка  $[0, \pi]$ , а  $a_0$  — свободный член при разложении функции  $f(z)$  в ряд Лорана.

**Теорема 3.** Для функции  $f(z) \in T_q$  при  $|z| = r$ ,  $q < r < 1$ , справедлива точная оценка

$$|f(z)| \leq S_q(r, 1) + |a_0|,$$

где

$$S_q(r, 1) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu} r}{(1 - q^{2\nu} r)^2}.$$

**Следствие.** Для функции  $f(z) \in T_q$  при заданном  $z \in R_q$  имеет место точная оценка

$$|f^{(n)}(z)| \leq |S_q^{(n)}(z, \cos \theta_0)|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\theta_0$  — некоторое значение из  $[0, \pi]$ . Если  $f(z) \in T_q$  и  $|z| = r$ ,  $q < r < 1$ , то имеет место

$$|f^{(n)}(z)| \leq S_q^{(n)}(r, 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

**Теорема 4.** Для функции  $f(z) \in T_q$  ( $f(z) \neq 0$  в  $R_q$ ) при заданном  $z \in R_q$  справедлива точная оценка

$$\min_{0 \leq \theta < \pi} \arg \{S_q(z, \cos \theta) + a_0\} \leq \arg f(z) \leq \max_{0 \leq \theta < \pi} \arg \{S_q(z, \cos \theta) + a_0\}.$$

Чтобы получить более общую теорему, чем теорема 1, укажем следующую лемму, аналогичную лемме 1 в работе (3):

**Лемма 2.** Если функция  $f(z)$  регулярна в кольце  $R_{q'}$ ,  $m < |z| < M$ ,  $m/M = q$ , и непрерывна в  $R_{q'}$ ,  $m \leq |z| < M$ , то справедливо

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(me^{i\theta})) K_q(mz^{-1}e^{i\theta}) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(Me^{i\theta})) K_q(M^{-1}ze^{-i\theta}) d\theta - iC + D,$$

где

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(z')) d\theta, \quad D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(z')) d\theta, \quad z' = q'e^{i\theta}, \quad m \leq q' \leq M.$$

Теорема 5. Для любой регулярной и типично вещественной функции

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

имеем в кольце  $R'_q$

$$f(z) = \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi S_q(mz^{-1}, \cos \theta) d\alpha_m(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_q(M^{-1}z, \cos \theta) d\alpha_M(\theta) + a_0,$$

где  $\alpha_m(\theta)$  и  $\alpha_M(\theta)$  — некоторые вещественные неубывающие и ограниченные в промежутке  $[0, \pi]$  функции, причем

$$\int_0^\pi d\alpha_m(\theta) = \pi(ma_1 - m^{-1}a_{-1}), \quad \int_0^\pi d\alpha_M(\theta) = \pi(Ma_1 - M^{-1}a_{-1}).$$

Обратное утверждение также справедливо.

Из этой теоремы легко можно получить ряд оценок для модуля функций, регулярных и типично вещественных в кольце  $R'_q$ .

Ленинградский государственный  
университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
1 VII 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Г. М. Голузин, Матем. сборн., 27 (69) : 2 (1950). <sup>2</sup> Г. М. Голузин, там же, 29 (71) : 2 (1953). <sup>3</sup> Ли Ен Пир, ДАН, 92, № 3 (1953).