Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

МАТЕМАТИКА

К. И. ГРИНЦЕВИЧУС

КОМПЛЕКС ПРЯМЫХ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VIII 1953)

В настоящей работе применяется метод канонизации подвижного репера ([1]) для построения основных дифференциально-геометрических понятий, связанных с комплексом прямых в аффинном пространстве. При этом исключаются из рассмотрения специальные комплексы (комплекс касательных к поверхности; комплекс, параллельные прямые которого лежат в одной плоскости, и т. д.).

Ось e_3 подвижного трехгранника $Ae_1e_2e_3$ поместим на прямой l комплекса. В процессе канонизации трехгранника методом Картана из стационарной восьмипараметрической подгруппы трехгранников нулевого порядка полностью определяется инвариантно связанный с прямой l трехгранник четвертого порядка.

Если инфинитезимальное перемещение трехгранника записать в виде

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^k e_k \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

а формы ω_3^1, ω_3^2, ω^1 считать независимыми, то трехгранник третьего порядка определяется линейными уравнениями:

$$\begin{gathered}
\omega^2 = 2\omega_3^1, \\
2(\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1) = m\omega_3^1 + 2\omega_3^2, \\
-(2\omega_2^1 + \omega^3) = 2\omega_3^1 + n\omega_3^2, \\
\omega_1^2 = 2\omega^1, \\
dm + m(\omega_3^3 - \omega_1^1) - 2\omega_1^2 + 4\omega_1^3 = r_1^1\omega_3^1 + r_1^2\omega_3^2 + r_1^3\omega^1, \\
2(\omega_3^3 - \omega_2^2) - m\omega_2^1 = r_1^2\omega_3^1 + (r_2^1 - 2)\omega_3^2 + r\omega^1, \qquad (1) \\
-8\omega_2^1 = r_1^3\omega_3^1 + r\omega_3^2 + r_3^1\omega^1, \\
dn - 4\omega_2^1 + n(2\omega_3^3 - \omega_2^2) = r_2^1\omega_3^1 + r_2^2\omega_3^2 + r_2^3\omega^1, \\
-\omega_1^3 = (r - 2n)\omega_3^1 + r_2^3\omega_3^2 + r_3^2\omega^1, \\
2(\omega_2^2 - 2\omega_1^1) = r_3^1\omega_3^1 + r_3^2\omega_3^2 + r_3^3\omega^1
\end{gathered}$$

и шестью билинейными уравнениями, которые можно получить, продифференцировав последние шесть уравнений системы (1) внешним образом.

Полученная система (1) позволяет выразить формы ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3, ω_1^2, ω_2^1, ω_1^3, ω^2, ω^3, dm, dn через главные формы ω_3^1, ω_3^2, ω^1. Форма ω_2^3 определяется лишь при канонизации четвертого порядка. Выполнив эту канонизацию так, чтобы

$$r = \frac{n}{2} r_1^3, \qquad (2)$$

мы будем иметь два инварианта второго порядка m, n и девять инвариантов r_i^h третьего порядка.

Геометрические понятия, связанные с окрестностями первого и второго порядков

Одномерное семейство параллельных прямых комплекса образует цилиндр, касательной плоскостью к которому вдоль образующей l является плоскость (e_1, e_3). Действительно, из уравнений параллельности $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ в силу (1) следует, что векторы dA, e_1 и e_3 компланарны. Плоскость (e_1, e_3) назовем касательной плоскостью луча комплекса.

Если прямая l вращается в плоскости $(e_2 + pe_1, e_3)$, то касательная плоскость перемещается и ее характеристика проходит через точку $B = A - 2pe_3$ параллельно некоторому вектору $e_1 + qe_3$, где $q = -4p^2$. При изменении p от $-\infty$ до $+\infty$ характеристика огибает гиперболу

$$xz = \frac{1}{4}, \qquad y = 0, \tag{3}$$

где x, y, z — координаты точки относительно трехгранника $Ae_1e_2e_3$. Асимптоты гиперболы (3) совпадают с осями e_1 и e_3. Направление e_1 называется главной нормалью [2] луча l.

Вершина A трехгранника находится в центре гиперболы (3). Точка A называется центром луча [2].

Характеристикой касательной плоскости (e_1, e_3) будет вектор e_1 тогда, когда прямая l вращается в плоскости (e_2, e_3). Плоскость (e_2, e_3) является касательной плоскостью к конусу прямых комплекса с вершиной в точке A. Плоскость (e_2, e_3) называется центральной плоскостью [2] луча l.

Чтобы получить геометрическое истолкование инвариантов m и n, выделяем из прямых комплекса параболическую конгруенцию [3] с фокусом в любой точке $F = A + te_3$

$$\omega^2 = 2\omega_3^1, \quad \omega^1 = -2t\omega_3^1 - {}^1/_2\, t^2\omega_3^2. \tag{4}$$

Асимптотические направления на фокальной поверхности параболической конгруенции (4) в силу (1) определяются уравнением

$$(2\omega_3^1 + t\omega_3^2)\,\{(4t^3 + mt - 4)\,\omega_3^1 + (t^4 + 2t - 2n)\,\omega_3^2\} = 0. \tag{5}$$

Если итти вдоль асимптотического направления, не совпадающего с лучом комплекса,

$$(4\,t^3 + mt - 4)\,\omega_3^1 + (t^4 + 2t - 2n)\,\omega_3^2 = 0, \tag{6}$$

то прямая l вращается в плоскости

$$\{(t^4 + 2t - 2n)\,e_1 - (4t^3 + mt - 4)\,e_2,\ e_3\}. \tag{7}$$

Вершина конуса, к которому плоскость (7) является касательной плоскостью, лежит в точке $G = A + \tau e_3$, где

$$\tau = \frac{2\,(t^4 + 2t - 2n)}{4t^3 + mt - 4}\,. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует геометрическое истолкование инвариантов m, n и некоторые свойства центра A:

а) Если координата t точки F определяется из уравнения

$$4t^3 + mt - 4 = 0, \tag{9}$$

то соответствующая точка G будет бесконечно удаленной; в этих трех точках F плоскость (7) совпадает с плоскостью (e_1, e_3). Центром тяжести этих трех точек F является точка A.

б) Если координата точки F определяется из уравнения

$$t^4 + 2t - 2n = 0, \tag{10}$$

то точка G совпадает с точкой A, а плоскость (7) — с плоскостью (e_2, e_3). Центром этих четырех точек F является точка A.

в) В четырех точках F, координаты которых получаются из уравнения

$$2t^4 + mt^2 - 8t + 4n = 0, \tag{11}$$

асимптотические направления на фокальной поверхности конгруенции (4) совпадают, а точка G совпадает с точкой F. Центром этих четырех точек является точка A. Эти четыре точки в проективном пространстве получены Мантре [4]. Исходя из свойств этих точек, он дал классификацию комплексов.

Так как $\sqrt[3]{\dfrac{t_1^3 + t_2^3 + t_3^3}{3}} = 1$, где t_1, t_2, t_3 — корни уравнения (9), то отклонение точки $A + e_3$ от центра A равно среднему кубическому отклонению трех точек F (в случае а).

Прямая, проходящая через точки $A + e_1$ и $A + e_3$, касается гиперболы (3).

Точка $A + e_1 + e_2$ лежит на образующей параболического цилиндра, имеющего вдоль луча l с цилиндром комплекса касание не ниже второго порядка и обладающего диаметральной плоскостью (e_2, e_3).

Действительно, в силу $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ смещение точки A имеет вид:

$$\Delta A = (\omega^1 + \ldots)\, e_1 + \{(\omega^1)^2 + \ldots\}\, e_2 + (\ldots)\, e_3,$$

а так как разность $\{(\omega^1)^2 + \ldots\} - (\omega^1 + \ldots)^2$ есть бесконечно малая величина не ниже третьего порядка, то цилиндр $y = x^2$ имеет с цилиндром комплекса касание не ниже второго порядка и точка $A + e_1 + e_2$ лежит на его поверхности.

Геометрические понятия, связанные с окрестностью третьего порядка

Направление вектора e_2 совпадает с асимптотическим направлением (6) на фокальной поверхности параболической конгруенции (3), соответствующей точке A. Действительно, в силу (6), (4), (2) и (1) при $t = 0$ получается, что dA колинеарен с e_2. Ось e_2 называется бинормалью [2] луча l.

Если луч l перемещается параллельно самому себе, то характеристика центральной плоскости (e_2, e_3) проходит через точку $A + \dfrac{8}{r_3^1} e_2$. В самом деле, если характеристика плоскости (e_2, e_3) пересекает ось e_2 в точке $M = A + \lambda e_2$, то из условия компланарности векторов dM, e_2 и e_3 в силу $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ получим $\lambda = \dfrac{8}{r_3^1}$. Это дает геометрическое истолкование инварианта r_3^1.

Плоскость $(e_2 - {}^1/_{12}\, r_3^3 e_1, e_3)$ является диаметральной плоскостью параболического цилиндра, имеющего с цилиндром комплекса касание не ниже третьего порядка. Действительно, если плоскость $(e_2 + \mu e_1, e_3)$

является диаметральной плоскостью параболического цилиндра, то при $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ в силу (1) имеем

$$\Delta A = \left\{\omega^1 + \frac{d\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 - 2\mu(\omega^1)^2}{2} + \ldots\right\} e_1 +$$

$$+ \left\{(\omega^1)^2 + \frac{3\omega^1 d\omega^1 + (\omega^1)^2 (\omega_1^1 + \omega_2^2)}{3} + \ldots\right\} \varepsilon + (\ldots) e_3,$$

где $\varepsilon = e_2 + \mu e_1$ и разность

$$\left\{(\omega^1)^2 + \frac{3\omega^1 d\omega^1 + (\omega^1)^2 (\omega_1^1 + \omega_2^2)}{3} + \ldots\right\} - \left\{\omega^1 + \frac{d\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 - 2\mu(\omega^1)^2}{2} + \ldots\right\}^2$$

будет бесконечно малой не ниже четвертого порядка только при условии $\mu = -{}^1/_{12}\, r_3^3$.

Если луч l вращается в центральной плоскости (e_2, e_3), то она огибает кривую, с которой парабола $x = 0$, $y = \frac{4}{n(r_1^3 - 8)} z^2$ имеет касание не ниже второго порядка. Действительно, если уравнение параболы записать в виде $x = 0$, $y = az^2$, то при $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ с точностью до бесконечно малых третьего порядка имеем $\Delta A = ({}^1/_2\omega^3\omega_3^2 + \ldots) e_2 + (\omega^3 + \ldots) e_3$, откуда разность $({}^1/_2\omega^3\omega_3^2 + \ldots) - a(\omega^3 + \ldots)^2$ будет бесконечно малой не ниже третьего порядка при $a = \frac{4}{n(r_1^3 - 8)}$.

Если луч l вращается в центральной плоскости (e_2, e_3), то главная нормаль e_1 описывает развертывающуюся поверхность и касается ребра возврата в точке $A + \frac{n(r_1^3 - 8)}{8r_2^3}$.

Действительно, если точку на оси e_1 записать в виде $R = A + \rho e_1$, то при $\omega_3^1 = \omega^1 = 0$ в силу (1) и (2) имеем

$$dR = (\ldots) e_1 + \left\{\frac{n(r_1^3 - 8)}{8} - \rho r_2^3\right\} \omega_3^2 e_3,$$

а отсюда следует, что при

$$\rho = \frac{n(r_1^3 - 8)}{8r_2^3}$$

вектор dR параллелен вектору e_1.

Поступило
8 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференц. геометрии, 1948. [2] W. Haack, Math. Zs., 40, стр. 560, 703 (1935); 41, стр. 252 (1936); 43, стр. 228 (1937). [3] С. П. Фиников, Теория конгруенций, 1950. [4] P. Mentré, Variétés de l'espace réglé, Paris, 1923.