Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

О СКОЛЬЗЯЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 31 VII 1953)

Пусть $f(x)$ — функция, определенная для $-\infty < x < \infty$. Положим $f^{(\alpha)}(x) = f(x+\alpha)$. Будем предполагать, что E_1 и E_2 — функциональные пространства типа E [1].

С помощью любого заданного тригонометрического полинома $T(t)$ порядка n можно построить линейную операцию из E_1 в E_2

$$\sigma_T(f) \equiv \sigma_T(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, T(x-t)\, dt.$$

Согласно [2] U называется линейной тригонометрической полиномиальной операцией типа T из E_1 в E_2, если:

1) U есть линейная операция из E_1 в E_2;

2) для любой $f \in E_1$ $U(f)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n;

3) если f — тригонометрический полином порядка не выше n, то $U(f) = \sigma_T(f)$.

Множество всех линейных тригонометрических полиномиальных операций типа T из E_1 в E_2 обозначим $\mathfrak{L}(T, E_1, E_2)$.

Если операция $U(f)$ удовлетворяет еще условию

$$U(f^\alpha) = [U(f)]^\alpha, \quad f \in E_1, \quad -\infty < \alpha < \infty,$$

то она называется скользящей линейной тригонометрической полиномиальной операцией типа T из E_1 в E_2 (коротко: скользящая ЛТПО типа T).

Легко видеть, что операция $\sigma_T(f)$ есть скользящая ЛТПО типа T.

В настоящей заметке мы докажем, что имеет место также обратное утверждение. А именно, справедлива теорема:

Теорема. *Пусть $U(f)$ есть произвольная скользящая ЛТПО типа T из E_1 в E_2. Тогда $U(f)$ тождественно совпадает с операцией $\sigma_T(f)$. Иными словами, для любой $f \in E_1$ справедливо равенство*

$$U(f) = \sigma_T(f). \tag{1}$$

Доказательство. В моей заметке [1] доказано, что для любой $U \in \mathfrak{L}(T, E_1, E_2)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U(f^\alpha)]^{-\alpha}\, d\alpha = \sigma_T(f), \quad f \in E_1. \tag{2}$$

Но в случае скользящей ЛТПО $U(f^\alpha) = [U(f)]^\alpha$. Следовательно,

$$[U(f^\alpha)]^{-\alpha} = \{[U(f)]^\alpha\}^{-\alpha} = U(f). \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает (1).

Теорема доказана.

Настоящая заметка возникла в связи с заметкой ([2]) С. М. Лозинского. Дело в том, что из формулировок теорем 3—4 заметки ([2]), а также из замечания к определению 4 заметки ([2]) видно, что С. М. Лозинский считает, что существуют скользящие ЛТПО типа T, отличные от σ_T. На самом же деле, как это видно из только что доказанной теоремы, таких операций нет. Таким образом, теоремы 3—4 из ([2]) должны быть сформулированы лишь для операции σ_T.

В заключение отмечу, что теорема 1 из ([2]) по существу содержится в ([1])*.

Поступило
27 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Берман, ДАН, 88, № 1 (1953). [2] С. М. Лозинский, ДАН, 89, № 5 (1953).

* Результаты из ([1]) были мною доложены 8 V 1951 г. на заседании семинара кафедры математического анализа Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова.