Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

ГЕОФИЗИКА

П. А. КИТКИН

О ДИНАМИКЕ МОРСКИХ И ОКЕАНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 15 VII 1953)

Характер движения в потоках морских и океанических течений отличается от движения вод суши анизотропностью турбулентности. Это различие турбулентного обмена количеством движения коренится в факте существенного преобладания горизонтальной протяженности морских водоемов по сравнению с их глубинами и в наличии плотностной стратификации вод. Вторым отличительным свойством движения морских вод является непостоянство интенсивности турбулизации. Интенсивность турбулентного обмена движением существенно изменяется с удалением от границ потоков и с развитием движения от состояния покоя.

Основную систему уравнений гидромеханики, которой пользуются в современной теоретической океанографии, неправильно называют упрощенной системой уравнений вязкой жидкости Навье — Стокса. Более того, в литературе нет физического обоснования и вывода основных уравнений гидромеханики морских и океанических течений.

При построении системы уравнений гидромеханики не следует отрывать поле скоростей от самой жидкости. Именно, вектор скорости необходимо всегда связывать с некоторым объемом жидкости, движение которого этот вектор характеризует. Размеры такого характерного объема определяются требованиями непрерывности дифференцируемости и интегрируемости векторов поля скорости.

Только при удовлетворении этим требованиям делается возможным изучение закономерностей движения методами математического анализа.

Повидимому, физические особенности изучаемого движения водного потока и, в частности, турбулизации движения заставляют полагать, что вблизи границ размеры характерного объема существенно больше, нежели вдали от границ. Здесь турбулизация движения сходит на нет и для изучения движения применимы уравнения Эйлера. Для случая движения на вращающейся земле в поле силы тяжести запишем уравнения в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla (\mathbf{vv}) + 2\,[\vec{\Omega},\ \mathbf{v}] + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p = g\,\mathbf{k}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости в точке объема, занятого жидкостью; $(\mathbf{vv})$ — диада векторов скорости; ρ — плотность; p — давление; g — ускорение силы тяжести; $\vec{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения земли; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы некоторой прямоугольной системы координат XYZ; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ — символический вектор набла.

В зоне турбулентного обмена количеством движения размеры характерного объема конечны и равны в горизонтальном боковом, горизонтальном продольном и вертикальном направлениях, соответственно, l_x, l_y, l_z. Вектор скорости, характеризующий движения всего объема в целом, $\mathbf{v}_c$, подчиняется требованиям непрерывности дифференцируемости и интегрируемости для всего пространства, занятого жидкостью. Вектор скорости в точке $\mathbf{v}$ этим требованиям не удовлетворяет. Разность двух этих векторов $\mathbf{v}'$ называют пульсационной скоростью. Ввиду того что вектор $\mathbf{v}_c$ является результатом суммирования всех векторов $\mathbf{v}$ в пространстве характерного объема, результирующий вектор пульсационных скоростей для характерного объема равен нулю, так же как и суммы компонент пульсационных скоростей вдоль длин l_x, l_y, l_z. Эти соображения позволяют написать уравнение для поля векторов $\mathbf{v}_c$ в следующей форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_c}{\partial t} + \nabla (\mathbf{v}_c \mathbf{v}_c) + 2\,[\vec{\Omega} \mathbf{v}_c] + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = g\,\mathbf{k} - \nabla (\mathbf{v}'\mathbf{v}')_c. \qquad (2)$$

Последний член правой части представляет объемную силу, возникшую от турбулентного обмена количеством движения внутри характерного объема. Величина этого члена определяется, с одной стороны, символическим вектором набла, который характеризуется масштабами расстояний l_x, l_u, l_z, с другой стороны, в этот член входит пульсационная скорость $\mathbf{v}'$.

Таким образом, интенсивность пульсационного движения внутри характерного объема и его размер естественно определяют турбулентный обмен количеством движения. Очевидно, что турбулентный обмен количеством движения, осуществляемый внутри характерного объема, приводит к изменению вектора $\mathbf{v}_c$ в пространстве. Поэтому совершенно так же как в вязкой жидкости напряжения и скорости деформации в точке ставятся друг другу в соответствие с помощью коэффициента молекулярной вязкости, так для турбулентного движения скорость деформации результирующей скорости характерного объема поставим в соответствие напряжениям на границе этого объема с помощью коэффициента турбулентного обмена количеством движения в соответствующем направлении.

Именно, напишем равенство диады пульсационных скоростей диаде напряжений на поверхности характерного объема:

$$(\mathbf{v}'\mathbf{v}') = [\pi_{xx}\,\mathbf{i} + \pi_{xy}\,\mathbf{j} + \pi_{xz}\,\mathbf{k}]\,\mathbf{i} + [\pi_{yx}\,\mathbf{i} + \pi_{yy}\,\mathbf{j} + \pi_{yz}\,\mathbf{k}]\,\mathbf{j} + \\ + [\pi_{zx}\,\mathbf{i} + \pi_{zy}\,\mathbf{j} + \pi_{zz}\,\mathbf{k}]\,\mathbf{k}. \qquad (3)$$

Компоненты напряжений полагаем пропорциональными изменению величины компонент вектора $\mathbf{v}_c$:

$$\begin{aligned} &\pi_{xx} = A_x \frac{\partial u_c}{\partial x}; \quad \pi_{xy} = A_y \frac{\partial u_c}{\partial y}; \quad \pi_{xz} = A_z \frac{\partial u_c}{\partial z}; \\ &\pi_{yx} = A_x \frac{\partial v_c}{\partial x}; \quad \pi_{yy} = A_y \frac{\partial v_c}{\partial y}; \quad \pi_{yz} = A_z \frac{\partial v_c}{\partial z}; \\ &\pi_{zx} = A_x \frac{\partial w_c}{\partial x}; \quad \pi_{zy} = A_y \frac{\partial w_c}{\partial y}; \quad \pi_{zz} = A_z \frac{\partial w_c}{\partial z}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Коэффициенты A_x, A_y и A_z характеризуют турбулентный обмен количеством движения вдоль расстояний l_x, l_y и l_z. Пульсационные скорости вдоль этих направлений одновременно определяют и интенсивность обмена и изменение результирующей скорости характерного объема. Следовательно, можно выписать равенства:

$$\begin{aligned} A_x &= -\varkappa_1 l_x |u'| = -\varkappa_1 l_x^2 \left| \frac{\partial u_c}{\partial x} \right|; \\ A_y &= -\varkappa_2 l_y |v'| = -\varkappa_2 l_y^2 \left| \frac{\partial v_c}{\partial y} \right|, \\ A_z &= -\varkappa_3 l_z |w'| = -\varkappa_3 l_z^2 \left| \frac{\partial w_c}{\partial z} \right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Вставляя в уравнение (2) вместо диады пульсационных скоростей диаду напряжений, компоненты которой выражены через изменения вектора $\mathbf{v}_c$ в пространстве, выписываем уравнения гидромеханики для движения характерного объема в проекциях на оси прямоугольной системы XYZ:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + 2(\Omega_y w - \Omega_z v) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_y \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ &\frac{dv}{dt} + 2(\Omega_z u - \Omega_x w) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ &\frac{dw}{dt} + 2(\Omega_x v - \Omega_y u) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Существенным отличием написанной системы уравнений турбулентного движения морских течений от системы уравнений движения вязкой жидкости в форме Навье — Стокса является отсутствие симметрии тензора напряжений. Это явствует из выражений для компонент тензора напряжений, которые определяются, наряду с величинами коэффициентов A_x, A_y и A_z, также и масштабными характеристиками l_x, l_y, l_z объема жидкости, к которому приложен вектор скорости $\mathbf{v}_c$.

В написанной системе уравнений коэффициенты A_x, A_y и A_z следует понимать как заданные функции пространства и времени. Пять неизвестных функций u, v, w, ρ, p требуют для замыкания системы уравнений еще два уравнения. Эти два недостающие уравнения доставляют условия неразрывности движения и несжимаемости жидкости. Именно, пишем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

и

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Последнее уравнение описывает факт неизменяемости плотности движущегося в пространстве характерного объема. Иначе говоря, предполагается, что движение происходит без притока тепла извне или его отдачи.

Для определения из общего решения системы уравнений (6), (7) и (8) частного интеграла необходимо задание начальных условий и условий на границах потока. В отличие от граничных условий движения вязкой жидкости, условия на границах потока жидкости при турбулентном обмене количеством движения можно задать в предположении скольжения жидкости вдоль границ или скольжения с трением. При этом границей потока является зона перехода от турбулентного движения к ламинарному движению в слое, пограничном с твердой стенкой.

Решение полной системы уравнений (6), (7) и (8) при переменном характере коэффициентов обмена A_x, A_y и A_z представляет собой почти непреодолеваемые трудности. Возможные упрощения базируются на соображениях о сравнительной величине членов уравнений. При оценке численных величин членов уравнений исходят из характерных для морских водоемов геометрических размеров потоков, величин горизонтальных компонент скорости, величин ускорения силы тяжести и ускорения Кориолиса. Так, при горизонтальных размерах водоемов в тысячи раз больше их глубин горизонтальные компоненты скорости оказываются в тысячи раз больше вертикальной компоненты скорости. Малая величина ускорения Кориолиса по сравнению с величиной ускорения силы тяжести и малая величина вертикальной скорости по сравнению с горизонтальной, в соединении с упрощающим предположением о неизменности коэффициента турбулентного обмена в горизонтальном направлении, позволяют выписать упрощенную систему уравнений гидромеханики морских течений в форме:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega_z v + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = A_L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_H\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega_z u + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = A_L\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_H\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad (9)\\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + wE = 0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{gathered}$$

Здесь введено $E = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}$, представляющее выражение известного в океанографии понятия статической плотностной устойчивости водной массы.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
15 VI 1953