Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ТЯБИН и М. А. ПУДОВКИН

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ В КОНИЧЕСКОМ ДИФФУЗОРЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 VII 1953)

В предыдущей статье было рассмотрено течение среды в плоском диффузоре [1]. Допустим, что вязко-пластическая дисперсная система течет в коническом диффузоре. Решение проведем на основании общих уравнений реологии вязко-пластической среды, установленных Н. В. Тябиным [2], которые записываются:

$$\rho(F - w) - \nabla p + \eta_{\text{пл}} \nabla^2 v + \nabla \Theta = 0, \quad \nabla v = 0. \tag{1}$$

В сферических координатах будем иметь $v_r = f(r, \theta)$, $v_\varphi = 0$. Н. В. Лазовская [3, 4] показала, что перемещение свинцовых реперов, заложенных в смазку, происходит вдоль радиусов конуса. Таким образом, линиями тока при течении вязко-пластических дисперсных систем являются радиусы конуса. Следовательно, $v_\theta = 0$. Внешние силы отсутствуют, $F = 0$, течение среды стационарное и медленное, поэтому $w = 0$. Так как течение происходит вдоль радиусов-векторов, то из компонентов тензора предельных напряжений не равна нулю компонента $\theta_{0r} = \theta^*$, где θ^* — предельное напряжение сдвига среды. При таких условиях уравнения (1) в сферических координатах упростятся:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta_{\text{пл}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\gamma\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r} - 2\frac{v}{r^2}\right) + \frac{\theta^*}{r}\operatorname{ctg}\theta = 0; \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta_{\text{пл}}\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (4) получаем, что $\frac{\partial}{\partial r}(vr^2) = 0$, или

$$r^2 v(r, \theta) = u(\theta), \tag{5}$$

т. е. будем рассматривать скорость на единичном расстоянии от вершины конуса. Интегрируя, а затем дифференцируя по r уравнение (3), получим

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2\eta_{\text{пл}}}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2\eta_{\text{пл}} v}{r^2} + f'(r). \tag{6}$$

Из уравнения (4) получим, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2v}{r^2} = 0. \tag{7}$$

Подставляя значение, определяемое (6), в уравнение (2), приняв во внимание (4) и $\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{6\eta_{пл} v}{r^2} + f'(r)$, учтя равенство (7), преобразуем уравнение (2) к виду:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{du}{d\theta} + 6u + B \operatorname{ctg}\theta = A, \tag{8}$$

где

$$A = \frac{f'(r)\, r^4}{\eta_{пл}}, \quad B = \frac{\theta^*}{\eta_{пл}} r^3.$$

Решим сначала однородное уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{du}{d\theta} + 6u = 0. \tag{9}$$

Вводя подстановку $u = \eta(x)$, где $x = \cos\theta$, сведем уравнение (9) к уравнению типа Лежандра:

$$(1-x)^2 \frac{d^2\eta}{dx^2} - 2x \frac{d\eta}{dx} + 6\eta = 0. \tag{10}$$

Будем решать уравнение (10) с помощью ряда $\eta = x^c \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_0 \neq 0$; c будем выбирать так, чтобы удовлетворять уравнению (9) тождественно. Решение уравнения примет вид:

$$u = C(1 - 3\cos^2\theta) + D(\cos\theta - {}^2/_3 \cos^3\theta - {}^1/_5 \cos^5\theta - {}^4/_{35} \cos^7\theta + \ldots), \tag{11}$$

где C и D — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (8) дано авторами [5]. Однако из-за его громоздкости обратимся к представлению частного решения уравнения (8) в форме рядов. Запишем уравнение (8) в виде:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left[\frac{1}{\theta} - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\theta^3}{45} + \frac{2}{945}\theta^5 + \ldots\right)\right]\frac{du}{d\theta} + 6u =$$
$$= A - B\left[\frac{1}{\theta} - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\theta^3}{45} + \frac{2}{945}\theta^5 + \ldots\right)\right].$$

Считая $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \theta^k$ и подставляя в последнее уравнение, найдем, что $a_0 = 0$, $a_1 = -B$, $a_2 = {}^1/_4 A$, $a_3 = {}^2/_3 B$, $a_4 = -{}^1/_{12} A$, $a_5 = -{}^2/_{15} B$, $a_6 = {}^7/_{1048} A$, $a_7 = {}^{91}/_{7608} A$ и т. д. Общее решение неоднородного уравнения (8) будет иметь вид:

$$u = C(1 - 3\cos^2\theta) + D(\cos\theta - {}^2/_3 \cos^3\theta - {}^1/_5 \cos^5\theta - {}^4/_{35} \cos^7\theta + \ldots) -$$
$$- B\theta + {}^1/_4 A\theta^2 + {}^2/_3 B\theta^3 - {}^1/_{12} A\theta^4 - {}^2/_{15} B\theta^5 + {}^7/_{1048} A\theta^6 + \ldots \tag{12}$$

Записывая решение (12) в форме рядов, получим:

$$u = C(-2 + 3\theta^2 - \theta^4 + \theta^6/4! + \ldots) + D({}^1/_{45} + {}^{49}/_{35}\theta^2 - {}^{38}/_{35}\theta^4 - {}^8/_9 \theta^6 - \ldots) -$$
$$- B\theta + {}^1/_4 A\theta^2 + {}^2/_3 B\theta^3 - {}^1/_{12} A\theta^4 - {}^2/_{15} B\theta^5 + {}^7/_{1048} A\theta^6 + \ldots \tag{13}$$

Так как в производственных условиях приходится иметь дело с коническими насадками, имеющими угол раствора конуса не более $\pi/6$, то членами высших степеней в разложении в ряды можно пренебречь. Тогда решение запишется:

$$u = E\theta^2 - B\theta - 2C_1, \tag{14}$$

где B, C_1, E — постоянные, определяемые из граничных условий. Внешние граничные условия состоят в том, что среда прилипает к стенке конуса, т. е. при $\theta = \alpha/2$ $u = 0$. Для определения внутренних граничных условий определим поверхность предельного напряжения сдвига, где $p_{r\theta} = \theta^*$.

При течении среды в конусе касательное напряжение будет:

$$p_{r\theta} = \theta^* + \frac{\eta_{\text{пл}}}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \theta^* + \frac{\eta_{\text{пл}}}{r^3}\frac{du}{d\theta}. \qquad (15)$$

Определяя из (14) $du/d\theta$ и подставляя в (15), получим:

$$p_{r\theta} = \theta^* + \eta_{\text{пл}}\frac{1}{r^3}(2E\theta - B) = 2\eta_{\text{пл}}\frac{E\theta}{r^3}. \qquad (16)$$

Следовательно, часть среды, движущаяся в направлении r с постоянной скоростью, будет соосным конусом (заштрихованная область на рис. 1). Угол поверхности предельного напряжения сдвига обозначим β. Из внутренних граничных условий имеем: при $\theta = \beta/2$ $du/d\theta = 0$.

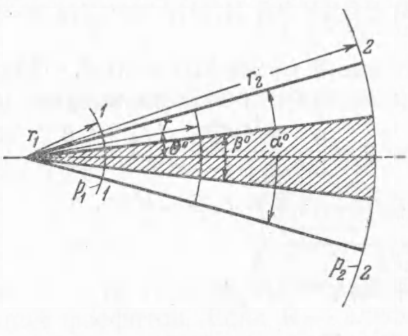

Рис. 1

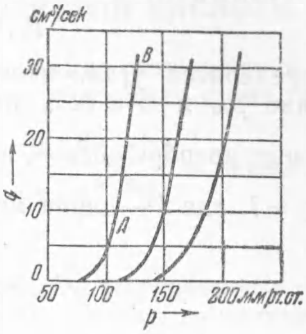

Рис. 2

Скорость движения квазитвердого конуса u_0 будет постоянной в направлении изменения угла θ от 0 до $\pm\beta/2$ при $r = \text{const}$. Очевидно, $u_0 = u(\beta/2)$, а так как $u(\theta) = r^2 v(r, \theta)$, то $v_0 = \frac{1}{r^2}u_0$. Для определения третьей производной постоянной в уравнении (14) воспользуемся условием сплошности среды. Н. В. Лазовская [4] экспериментально подтвердила выполнимость уравнения сплошности для течения консистентных смазок в конусах:

$$q = \int_0^{\beta/2} u_0 2\pi \sin\theta\, d\theta + \int_{\beta/2}^{\alpha/2} u\, 2\pi \sin\theta\, d\theta, \qquad (17)$$

где q — секундный расход, u_0 — радиальная скорость течения сплошного конуса в центре насадки. Разлагая тригонометрические функции, получающиеся в результате интегрирования выражения (17), в ряды и ограничиваясь первыми членами разложения, получим:

$$q = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha^4 + 2\beta^4}{24}E - \frac{(2\alpha^3 + \beta^3)}{12}B - \alpha^2 C_1\right]. \qquad (18)$$

В результате из граничных условий получаем систему уравнений: $\frac{\alpha^2 E}{4} - \frac{\alpha B}{2} - 2C_1 = 0$, $\beta E - B = 0$, $\frac{\alpha^4 + 2\beta^4}{24}E - \frac{2\alpha^3 + \beta^3}{12}B - \alpha^3 C_1 - \frac{2q}{\pi} = 0$. Решив ее, получим: $E = 24q/\pi k$, $B = 24\beta q/\pi k$, $C_1 = 6(\alpha^2 - 2\alpha\beta)q/\pi k$, где $k = \alpha^3(\beta - \alpha)$. Подставив эти значения в уравнения (14) и (5), получим скорость течения дисперсной системы в конусе:

$$v(r, \theta) = \frac{6q(\alpha^2 - 4\theta^2 - 2\alpha\beta + 4\beta\theta)}{\pi r^2 \alpha^3(\alpha - \beta)}. \qquad (19)$$

Угол β определим из условия равновесия сил, действующих на поверхность центрального квазитвердого конуса. Если p_1 и p_2 — давления в сечениях *1—1* и *2—2* (см. рис. 1), то получим $\pi\theta^*(r_2 - r_1)(R_2 - R_1) =$

$= 2\pi (p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)(1 - \cos(\beta/2))$, $R_1 = r_1 \sin(\beta/2)$ и $R_2 = r_2 \sin(\beta/2)$; разлагая тригонометрические функции в ряды и ограничиваясь первыми членами разложения, получим:

$$\theta^* (r_2^2 - r_1^2) = (p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)\beta/2. \tag{20}$$

Если истечение происходит через конфузор в атмосферу, то

$$\theta^* (r_2^2 - r_1^2) = p_2 r_2^2 \beta/2 \tag{21}$$

$$\beta = 2\frac{\theta^*}{p^2}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \tag{22}$$

Определим теперь выражение для секундного расхода среды, вытекающей из конфузора. Аналогично выражению (21), получим

$$p_{r0}(r_2^2 - r_1^2) = p_2 r_2^2 \alpha/2; \tag{23}$$

$p_{r\theta}$ определится уравнением (16), где $E = 24q/\pi(\beta - \alpha)\alpha^3$. Подставив значение $p_{r\theta}$ и E в (23), отнеся к выходу среды из конуса $(r = r_1)$, произведя преобразования, получим: $q = \frac{\pi\alpha^4 r_1^3 r_2^2 p_2}{48\eta_{\text{пл}}(r_2^2 - r_1^2)}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Так как $r_2 - r_1 = l$, где l — длина конуса, $r_2 \cong 2R_2/\alpha$ и $r_1 \cong 2R_1/\alpha$, то

$$q = \frac{\omega R_1 R_2^2 p_2}{3\eta_{\text{пл}} l (R_1 + R_2)}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right), \tag{24}$$

где ω — площадь истечения $\omega = \pi R_1^2$. Предельное давление, соответствующее началу течения, определится из выражения (23):

$$\text{при } p_{r\theta} = \theta^* \quad p_0 = \frac{2\theta^*}{\alpha}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right), \tag{25}$$

Подставляя значение углов α и β из (22) и (25), получим

$$q = \frac{\omega R_1 R_2^2 (p_2 - p_0)}{3\eta_{\text{пл}} l (R_2 + R_1)}. \tag{26}$$

Эмпирическая формула зависимости $q = f(p)$, установленная М. П. Воларовичем и Н. В. Лазовской ([6]) при движении торфа в насадке, записывается:

$$q = k\omega \frac{(p_2 - p_0)^\gamma}{h^\gamma}, \tag{27}$$

где k — коэффициент, h — высота конуса, $\gamma = 2{,}91$. Они считали, что сдвиг происходит по боковой поверхности цилиндра с диаметром d — выходного отверстия конуса, что противоречит экспериментально установленным Лазовской радиальным линиям тока и приводит к невыполнению условия сплошности среды. Опытные графики (см. рис. 2) показывают, что формула (26) справедлива для больших давлений, где зависимость $q = f(p)$ линейна (отрезок AB). Экспериментальная формула (27) не соответствует зависимости при больших давлениях и скоростях истечения.

Поступило
20 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Тябин, ДАН, 84, № 5 (1952). [2] Н. В. Тябин, Колл. журн., 13, 1 (1951). [3] Н. В. Лазовская, Диссерт., М., 1950. [4] Н. В. Лазовская, Колл. журн., 12 (1950). [5] Н. В. Тябин, М. А. Пудовкин, Тр. Казанск. хим.-технолог. ин-та им. С. М. Кирова, в. 17 (1952). [6] М. П. Воларович, Н. В. Лазовская, ДАН, 76, № 2 (1951).