Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

ФИЗИКА

А. АХИЕЗЕР и В. АЛЕКСИН

ВРЕМЯ НАМАГНИЧЕНИЯ СЛАБОГО РАСТВОРА He^3 в He^4

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 6 VII 1953)

1. Так как ядра He^3 в отличие от ядер He^4 обладают магнитным моментом, то раствор He^3 в He^4 должен быть парамагнитным. Возможность намагничения такого раствора обусловливается, главным образом, дипольным взаимодействием между ядрами He^3. Целью настоящей заметки является определение времени намагничения слабого раствора He^3 в He^4 как функции температуры и концентрации He^3.

2. Предполагая раствор слабым, мы можем считать, что ядра He^3 образуют идеальный фермиевский газ, частицы которого обладают спином $^1/_2$. Магнитный момент единицы объема такого газа равен

$$M = \mu \sum_{\mathbf{p}} (n^+_{\mathbf{p}} - n^-_{\mathbf{p}}), \tag{1}$$

где μ — магнитный момент ядра He^3, а $n^+_{\mathbf{p}} \equiv n_{^1/_2\mathbf{p}}$ и $n^-_{\mathbf{p}} \equiv n_{-^1/_2\mathbf{p}}$ — число ядер в единице объема с положительной и отрицательной ориентациями момента и импульсом $\mathbf{p}$ $\left(m = \pm{}^1/_2 \text{— магнитное квантовое число}\right)$.

Так как магнитное взаимодействие ядер He^3 является очень слабым и изменение M происходит поэтому крайне медленно, то можно считать, что каждому значению M соответствует статистическое равновесие. Поэтому функция распределения $n_{m\mathbf{p}}$ может быть определена из условия максимума энтропии газа He^3

$$S = -k \sum_{m\mathbf{p}} \{(1 - n_{m\mathbf{p}}) \ln (1 - n_{m\mathbf{p}}) + n_{m\mathbf{p}} \ln n_{m\mathbf{p}}\} \tag{2}$$

при следующих дополнительных условиях

$$\sum_{m\mathbf{p}} n_{m\mathbf{p}} = n, \quad \sum_{m\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} n_{m\mathbf{p}} = E, \quad 2\mu \sum_{m\mathbf{p}} m n_{m\mathbf{p}} = M, \tag{3}$$

где n и E — число частиц He^3 и их энергия в единице объема, $\varepsilon_p = p^2/2m$ — кинетическая энергия ядра He^3, m — его масса*.

Приравняв нулю вариацию $S - \alpha n - \beta E - \gamma M$ (α, β, γ — константы), найдем равновесную функцию $n_{m\mathbf{p}}$:

$$n_{^1/_2\mathbf{p}} = (e^{-\alpha + \beta\varepsilon_p + \gamma\mu} + 1)^{-1}, \qquad n_{^1/_2\mathbf{p}} = (e^{\alpha + \beta\varepsilon_p - \gamma\mu} + 1)^{-1} \tag{4}$$

и магнитный момент

$$M = -2\gamma\mu^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \qquad x = \alpha + \beta\varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_0}{T}, \tag{5}$$

* Аналогичный метод был применен Л. Э. Гуревичем [1] при рассмотрении кинетики намагничения обычных одноатомных газов.

где ε_0 — химический потенциал, T — температура, выраженная в эргах; предполагается, что $\gamma\mu \ll 1$.

Поставим теперь следующий вопрос. Пусть система ядер He^3 в некоторый момент времени обладает определенным магнитным моментом M. Как будет изменяться с течением времени момент этой системы в отсутствие внешнего магнитного поля?

Так как

$$\dot{M} = 2\mu \sum_{m\mathbf{p}} m \dot{n}_{m\mathbf{p}},$$

то вопрос сводится к определению изменения со временем функции распределения, обусловленного магнитным взаимодействием между ядрами He^3. Это изменение определяется следующим уравнением:

$$\dot{n}_{m_1p_1} = \sum_{\substack{m_2p_2,\, m_1'p_1' \\ m_2'p_2'}} w_{\substack{m_1p_1,\, m_2p_2 \\ m_1'p_1',\, m_2'p_2'}} \{ n_{m_1'p_1'} \cdot n_{m_2'p_2'} (1 - n_{m_1p_1})(1 - n_{m_2p_2}) - \\ - n_{m_1p_1} n_{m_2p_2} (1 - n_{m_1'p_1'})(1 - n_{m_2'p_2'}) \}, \tag{6}$$

где $w_{\substack{m_1p_1,\, m_2p_2 \\ m_1'p_1',\, m_2'p_2}} \equiv w$ — вероятность того, что два ядра из состояний m_1p_1 и m_2p_2 перейдут в единицу времени в состояния $m_1'p_1'$ и $m_2'p_2'$. Подставляя сюда (4), получим при $\gamma\mu \ll 1$

$$\dot{n}_{m_1p_1} = 2\gamma\mu \sum_{m_2p_2,\, m_1'p_1',\, m_2'p_2'} w \frac{m_1 + m_2 - m_1' - m_2'}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)(e^{-x_1'}+1)(e^{-x_2'}+1)} \tag{7}$$

и

$$\dot{M} = \gamma\mu^2 \sum_{m_1p_1,\, m_2p_2,\, m_1'p_1',\, m_2'p_2'} w \frac{(m_1 + m_2 - m_1' - m_2')^2}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)(e^{-x_1'}+1)(e^{-x_2'}+1)}. \tag{8}$$

Используя (5), мы видим, что

$$\dot{M} = -\frac{1}{\tau} M, \tag{9}$$

где величина τ, определяемая из равенства

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{m_1p_1,\, m_2p_2,\, m_1'p_1',\, m_2'p_2'} w \frac{(m_1 + m_2 - m_1' - m_2')^2}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)(e^{-x_1'}+1)(e^{-x_2'}+1)} \Bigg/ \sum_{m_1p_1} \frac{e^{x_1}}{(e^{x_1}+1)^2}, \tag{10}$$

и представляет интересующее нас время намагничения.

3. Вероятность перехода w может быть определена с помощью теории возмущений:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{if}|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2'),$$

где $V_{if} = \int \psi_f^* V \psi_i d\tau$ — матричный элемент магнитной энергии взаимодействия

$$V = \mu^2 \left\{ \frac{\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 - 3(\vec{\sigma}_1 \mathbf{n})(\vec{\sigma}_2 \mathbf{n})}{r^3} \right\}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

из начального состояния

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \{ e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{r}_2)/\hbar} \chi_1(1) \chi_2(2) - e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_2 - \quad \mathbf{r}_1)/\hbar} \chi_1(2) \chi_2(1) \}$$

в конечное состояние

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \{ e^{i(\mathbf{p}_1'\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2'\mathbf{r}_2)/\hbar} \chi_1'(1) \chi_2'(2) - e^{i(\mathbf{p}_1'\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_2\mathbf{r}_1)/\hbar} \chi_1'(2) \chi_2'(1) \}$$

(σ — матрицы Паули, χ — спиновые волновые функции, Ω — нормировочный объем).

Используя формулы

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)_{\substack{m_1 m_2\\ m_1' m_2'}} = 4m_1m_2\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'} + 2\delta_{m_1', m_1+1}\delta_{m_2', m_2-1} + 2\delta_{m_1', m_1-1}\delta_{m_2', m_2+1}$$

и замечая, что в (10) входит $(m_1 + m_2 - m_1' - m_2')^2$, легко убедиться, что член, содержащий $\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$, не вносит вклада в $1/\tau$. Выполнив интегрирование и опустив этот член, получим

$$w = \frac{32\pi^3\mu^4}{\hbar\Omega^2} \left| (\vec{\sigma}_1\mathbf{n})_{\substack{m_1\\ m_1'}}(\vec{\sigma}_2\mathbf{n})_{\substack{m_2\\ m_2'}} - (\vec{\sigma}_1\mathbf{n}')_{\substack{m_1\\ m_2'}}(\vec{\sigma}_2\mathbf{n}')_{\substack{m_2\\ m_1'}}\right|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2'),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'|}, \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1'}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1'|}. \tag{11}$$

Легко далее убедиться, что интерференционный член в (11) также не вносит вклада в $1/\tau$. Поэтому можно пользоваться следующим выражением для w:

$$w = \frac{32\pi^3\mu^4}{\hbar\Omega^2}\left\{\left|((\vec{\sigma}_1\mathbf{n})(\vec{\sigma}_2\mathbf{n}))_{\substack{m_1m_2\\ m_1'm_2'}}\right|^2 + \left|((\vec{\sigma}_1\mathbf{n}')(\vec{\sigma}_2\mathbf{n}'))_{\substack{m_1m_2\\ m_2'm_1'}}\right|^2\right\}\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2') =$$

$$= \frac{32\pi^3\mu^4}{\hbar\Omega^2} 8\left\{(1 - \cos^2\vartheta) + (1 - \cos^2\vartheta')\right\}\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2'), \tag{12}$$

где ϑ и ϑ' — углы между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ и осью квантования.

Оба слагаемых в (12), содержащих ϑ и ϑ', вносят одинаковый вклад в $1/\tau$. Иными словами, учет обмена ядер приводит к удвоению результата, который получился бы без учета обмена.

Подставив (12) в (10) и переходя от суммирования по $\mathbf{p}$ к интегрированию по $\frac{\Omega p^2\,dp\,do}{(2\pi)^3} \to \frac{\Omega\sqrt{2m\varepsilon_0}}{(2\pi)^3} mT\,dx\,do$ (do — элемент телесного угла, в котором лежит $\mathbf{p}$), получим в случае вырожденного газа Ферми ($T \ll \varepsilon_0$) следующее выражение для $1/\tau$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{T^2\varepsilon_0\mu^4m^3}{\pi^4\hbar^7}\int(1 - \cos^2\vartheta)\,\frac{\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2')\,dx_1\,dx_1'\,dx_2\,do_1\,do_1'\,do_2}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)(e^{-x_1'}+1)(e^{x_1'-x_1-x_2}+1)}.$$

Устранив δ-функцию интегрированием по do_2 и заменив p на $\sqrt{2m\varepsilon_0}$, получим в результате интегрирования

$$\frac{1}{\tau} = \frac{32\pi}{3}\,\frac{\mu^4m^3T^2}{\hbar^7}, \quad T \ll \varepsilon_0. \tag{13}$$

Таким образом, при $T \ll \varepsilon_0$ время релаксации обратно пропорционально квадрату температуры и не зависит от концентрации He^3 (концентрация газа должна быть, однако, достаточно большой, чтобы выполнялось неравенство $T \ll \varepsilon_0$). Из (13) следует, что при $T = 1°K$ $\tau \approx 4$ часа.

4. Если температура значительно выше температуры вырождения ε_0, то можно пользоваться статистикой Больцмана. Повторяя предыдущие рассуждения, получим в этом случае

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m_1p_1,\ m_2p_2\\ m_1'p_1',\ m_2'p_2'}} w\,(m_1 + m_2 - m_1' - m_2')^2\,\frac{e^{-(x_1+x_2)}}{\sum e^{-x_1}} =$$

$$= \frac{16\pi^3\mu^4}{\hbar\Omega^2}\sum_{p_1p_2p_1'p_2'} 16\,(1 - n_z^2)\,e^{-(x_1+x_2)}\,\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2')\,\frac{1}{\sum\limits_{p_1} e^{-x_1}}. \tag{14}$$

Заменяя суммирование по p интегрированием по $\frac{\Omega p^2\, dp\, do}{(2\pi)^3}$, получим в результате интегрирования

$$\frac{1}{\tau} = \frac{128}{3}\sqrt{\pi}\,\frac{\mu^4 m^{3/2} n T^{1/2}}{\hbar^4}, \quad T \gg \varepsilon_0. \tag{15}$$

Таким образом, в области высоких температур время релаксации обратно пропорционально концентрации He^3 и корню квадратному из температуры.

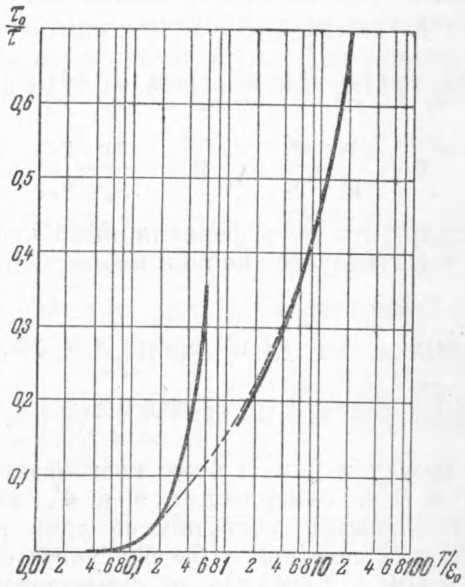

Рис. 1

Вводя температуру вырождения $\varepsilon_0 = (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m}$, перепишем (13) и (15) в виде

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \begin{cases} \left(\frac{T}{\varepsilon_0}\right)^2, & T \ll \varepsilon_0, \\ {}^{8}/_{3}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\pi^3}\sqrt{\frac{T}{\varepsilon_0}}, & T \gg \varepsilon_0, \end{cases} \tag{16}$$

где $\frac{1}{\tau_0} = 32\cdot 3^{1/3}\cdot\pi^{11/3}\,\frac{m\mu^4 n^{4/3}}{\hbar^3}$.

На рис. 1 представлена зависимость τ_0/τ в предельных случаях низких и высоких температур. Пунктирная кривая дает возможность приближенно определять τ при любых температурах.

В заключение выражаем благодарность акад. Л. Д. Ландау и проф. И. Я. Померанчуку за ценные советы и дискуссию.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
18 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Э. Гуревич, ЖЭТФ, 6, 544 (1936).