

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ КАРТИНА ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ ОТ ВЕТРА ВОЛНЕ

В предыдущей статье нами была высказана физическая гипотеза ⁽¹⁾ о том, как энергия ветра передается волне. Сейчас мы попытаемся получить непосредственно из уравнений гидродинамики приближенные соотношения, которые позволят убедиться в справедливости высказанной гипотезы и выявят некоторые новые важные обстоятельства.

Поместим начало прямоугольной системы координат на уровне спокойной поверхности моря, ось X направим горизонтально в сторону распространения волн, а ось Y — вертикально вниз. Решая плоскую задачу, будем считать волны двумерными; их сечения вертикальными плоскостями, параллельными $X'Y'$, будут одинаковы. Координаты x и y каждой частицы представляют собой функции начальных координат a , b этой частицы и времени t . Запишем уравнения движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - g \right) \frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial a}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - g \right) \frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial b}. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности запишется тоже в обычной форме.

Как известно, уравнениям (1), (2) удовлетворяет частное решение

$$x - a = r \sin \theta; \quad y - b = r \cos \theta. \quad (3)$$

Орбитой частицы служит окружность радиуса r с центром в точке, обладающей координатами a , b . Остальные обозначения таковы:

$$\theta = ka - \omega t; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

Угол θ отсчитывается от положительной полуоси Y (нижней).

В отличие от обычной, стационарной задачи будем считать, что и радиус r орбиты, и длина λ волны меняются во времени. Разумеется, при этом должен меняться и период T волны, но, как известно, он меняется значительно медленнее; поэтому в (4) мы будем считать меняющимся во времени волновое число k , а угловую частоту ω примем постоянной. Пренебрежем также влиянием нестационарных условий на закон убывания r при увеличении глубины b центра исследуемой орбиты частицы. Тогда окажется, что в нашем случае:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \ddot{k}ar_0 e^{-hb} \cos \theta + 2(\dot{k}a - \omega) \frac{dr_0}{dt} e^{-hb} \cos \theta - \\ & - (\dot{k}a - \omega)^2 r_0 e^{-hb} \sin \theta + \frac{d^2r_0}{dt^2} e^{-hb} \sin \theta; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} = & -\ddot{k}ar_0 e^{-hb} \sin \theta - 2(\dot{k}a - \omega) \frac{dr_0}{dt} e^{-hb} - \\ & - (\dot{k}a - \omega)^2 r_0 e^{-hb} \cos \theta + \frac{d^2r_0}{dt^2} e^{-hb} \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \dot{k} и \ddot{k} , соответственно, обозначают первую и вторую производные от k по времени t .

Производные от x и y по a и b запишутся в том же хорошо известном виде, в каком пишутся они и в стационарной задаче:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + kr_0 e^{-hb} \cos \theta; \quad \frac{\partial x}{\partial b} = -kr_0 e^{-hb} \sin \theta; \quad (7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -kr_0 e^{-hb} \sin \theta; \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1 - kr_0 e^{-hb} \cos \theta. \quad (8)$$

Подставив выражения (5), (6), (7), (8) в (1) и (2), можно вслед за тем получить в явном виде выражения $\partial p / \partial a$ и $\partial p / \partial b$, а зная их, найти общее выражение для давления на свободной поверхности воды.

В цитированной нашей статье мы показали, что при исследовании ветровой волны нельзя полагать давление p_0 на свободной поверхности постоянным: за счет обтекания волн воздушным потоком это давление понижается на некоторую заметную величину σ над вершинами и примерно на такую же величину повышается над подошвами волн, по сравнению со средним уровнем. В соответствии с этим сейчас положим:

$$\bar{p}_0 + \frac{\sigma \cos \theta}{\delta} = \frac{1}{\delta} \left| \int \left(\frac{\partial p}{\partial a} da + \frac{\partial p}{\partial b} db \right) \right|_{b=0}. \quad (9)$$

Здесь через \bar{p}_0 обозначено давление воздуха на плоскости, проходящей через центры орбит поверхностных водных частиц.

После подстановки в (9) всех соответствующих выражений из (1), (2), (5), (6), (7), (8) (при $b = 0$) получится весьма громоздкое уравнение, содержащее следующие характерные группы членов: а) с косинусами угла θ ; б) с синусами этого угла; в) свободные члены (без функций θ); г) члены, содержащие координату a . Совершенно очевидно, что, перенеся все члены в одну часть уравнения, мы будем обязаны приравнять нулю каждую из этих четырех групп порознь. Сейчас мы займемся лишь той группой, члены которой содержат $\cos \theta$ в качестве множителя и в то же время не содержат a . В свою очередь, в этой группе отметим два члена, сумма которых всегда считается равной нулю в стационарной задаче:

$$r_0 \frac{\omega^2}{k} - gr_0 = 0. \quad (10)$$

Именно из этого условия вытекает известная формула для скорости волн c_0 в глубоководном море. Будем и сейчас считать соотношение (10) справедливым, а потом обсудим основательность такого допущения. Приняв во внимание (10), приравняем нулю все оставшиеся члены избранной группы. Тогда после простых преобразований получим:

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} - \frac{\dot{k}}{k} \frac{dr_0}{dt} - \left(\frac{\ddot{k}}{2k} - \frac{\dot{k}^2}{k^2} + \frac{\omega^2}{2} \right) r_0 - \frac{\sigma k}{2\delta} = 0. \quad (11)$$

В этом дифференциальном уравнении с переменными коэффициентами пока остается неизвестным даже закон изменения самих коэффициентов. Для вполне строгого решения задачи пришлось бы записать еще те дополнительные условия, которые остались неиспользованными, а затем совместно решать систему дифференциальных уравнений второго порядка. Заранее можно сказать, что такое решение было бы доступно только с применением численных методов интегрирования, не дающих никакого представления о сути явления.

Между тем, наши непосредственные измерения волн, возникающих в бассейне под действием ветра, показали, что на довольно большом протяжении времени высота волн, а следовательно, и r_0 , нарастает по линейному закону. Иными словами, тут можно полагать $dr_0/dt = \text{const}$.

Но в таком случае решающую роль в уравнении (11) должны играть второй и четвертый члены. Первым и третьим можно пренебречь, добиваясь приближенного аналитического решения задачи. Итак, вместо (11) запишем просто:

$$-\frac{\dot{k}}{k^2} \frac{dr_0}{dt} = \frac{\sigma}{2\delta}. \quad (12)$$

Вспомнив второе из уравнений (4), выразим через λ весь множитель перед dr/dt . Учтем прежде всего, что $\dot{k} = \frac{dk}{dt} = -\frac{2\pi d\lambda}{\lambda^2 dt}$. Подставим это выражение в (12) вместе с аналогичным выражением k^2 . Тогда после простых преобразований получим соотношение

$$\frac{dr_0}{dt} \frac{d\lambda}{dt} = \pi \frac{\sigma}{\delta}. \quad (13)$$

Итак, колебание атмосферного давления над свободной поверхностью воды, происходящее с заданной амплитудой σ , вызывает нарастание высоты ($h = 2r_0$) волн, в соответствии с нашей гипотезой. Но этого мало: первоначально поставив перед собой цель доказать справедливость гипотезы методом гидродинамики, мы одновременно обнаружили физическую причину нарастания длины волн. Длина волн не входит ни в какие выражения для энергии волн, приходящейся на единицу поверхности. Поэтому до настоящего времени не было никаких путей для выяснения причины нарастания длины волн, еще более стремительного по сравнению с нарастанием высоты. Сейчас, в нашем соотношении (13) рядом в качестве сомножителей стоят обе важные величины: и скорость нарастания высоты, и скорость нарастания длины волн. И для высоты, и для длины нарастание обеспечено за счет одного и того же замечательного параметра σ : за счет колебания атмосферного давления над свободной поверхностью воды.

Уравнение (13) не учитывает никаких факторов, замедляющих развитие волн: помимо отброшенных членов уравнения (11), оно молчаливо игнорирует важное действие турбулентного трения, развивающегося при волнообразовании. Следовательно, решение (13) заведомо дает сильно завышенную скорость нарастания волн. Тем не менее, попытаемся определить этот безусловно слишком высокий верхний предел. Вспомним, что отношение высоты волн ($h = 2r_0$) к длине λ меняется в сравнительно узких границах, и для простоты положим $\lambda = Nr_0$, где N — постоянное число, составляющее обычно несколько десятков. Тогда вместо (13) можно будет записать:

$$N \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 = \pi \frac{\sigma}{\delta} \quad \text{или} \quad \frac{dr_0}{dt} = \sqrt{\frac{\pi \sigma}{N \delta}}. \quad (14)$$

В свою очередь, как известно, σ выражается через скорость ($v - c$) ветра относительно волн, через плотность воздуха δ_a и безразмерный коэффициент n , зависящий от формы и отчасти от амплитуды волн:

$$\sigma = n \delta_a (v - c)^2. \quad (15)$$

Следовательно, верхний предел скорости нарастания волн можно выразить через скорость ветра относительно волн:

$$\frac{dr_0}{dt} = (v - c) \sqrt{\pi \frac{n \delta_a}{N \delta}}. \quad (16)$$

Подставим сюда числовые значения величин, взятые из непосредственных измерений: ($v - c$) = 700 см/сек, $n = 0,05$ (на средней стадии развития волн), $\delta_a / \delta = 1,25 \cdot 10^{-3}$, $N = 40$. Тогда окажется, что верхний предел скорости нарастания волн лежит около $dr_0/dt = 1,5$ см/сек. Как и следовало ожидать, это значение — сильно завышенное. Очень серьезная причина завышения кроется в том, что нами не была

использована сложная система дифференциальных уравнений, вытекающих из (9), а было грубо приближенно решено одно уравнение этой системы — (11). Легко показать, как сильно может быть приближено к действительности значение dr_0/dt за счет совсем небольших изменений других параметров, значения которых мы приняли более или менее произвольно. Действительно, допустим, например, что равенство (10), выполняющееся в стационарной задаче, не вполне точно выполняется в нашей нестационарной. В соответствии с этим запишем теперь вместо (10):

$$r_0 \frac{\omega^2}{k} - gr_0 - \frac{\dot{k}}{k^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\sigma}{2\delta}. \quad (17)$$

Посмотрим, как скорость волн c в нашей нестационарной задаче должна отличаться от классической величины c_0 , соответствующей глубоководному морю, чтобы скорость нарастания волн dr_0/dt , вычисленная по (17), составила лишь очень малую долю ε от значения, вычисленного выше на основании (12). При таких условиях, очевидно, вместо (12) запишется: $-\frac{\dot{k}}{k^2} \frac{dr}{dt} = \varepsilon^2 \frac{\sigma}{2\delta}$, а значит вместо (17) можно будет записать:

$$r_0 \left(\frac{\omega^2}{k} - g \right) = (1 - \varepsilon^2) \frac{\sigma}{2\delta}. \quad (18)$$

При $\varepsilon = 1$, (18) автоматически превращается в (10).

Простые преобразования позволяют из (18) вывести выражение для искомой скорости c волн в нестационарной задаче. Прежде всего из (18) следует с учетом (4):

$$\left(\frac{\lambda}{T} \right)^2 = c^2 = \left[g + (1 - \varepsilon^2) \frac{\sigma}{\delta r_0} \right] \frac{\lambda}{2\pi},$$

а значит

$$c = \sqrt{ \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \sigma \lambda}{4\pi \delta r_0} }. \quad (19)$$

Второй член в (19), стоящий под корнем, составляет лишь очень небольшую долю от основного, хорошо известного из теории волн. Следовательно, разложив в ряд корень квадратный из двучлена, отбросив малые высших порядков, подставив вместо σ его выражение из (15) и выполнив элементарные преобразования, легко показать, что относительное приращение скорости c_0 (стационарной) чрезвычайно незначительно:

$$\frac{c - c_0}{c_0} \approx \frac{1}{4} (1 - \varepsilon^2) \frac{\delta_a n (v - c)^2}{\delta r_0 g}. \quad (20)$$

Вспомнив численные значения величин, входящих в (20), убедимся, что относительное приращение скорости составляет не более нескольких процентов.

Можно попытаться учесть и изменение ω с изменением размеров волн. Однако при этом выражение (9) становится столь сложным, что полностью исключается возможность решения задачи в квадратурах. Удастся лишь отметить, что после приравнивания нулю группы членов с множителем $\cos \theta$, некоторые члены, содержащие ω и ее производные, оказываются зависящими от θ . Отсюда следует, что, помимо постепенного нарастания периода T волн, должны происходить колебания ω в пределах одного периода. Наши опыты подтверждают наличие подобных колебаний.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
4 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Шулейкин, ДАН, 91, № 5 (1953).