

И. А. ЧАРНЫЙ

**ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 24 VI 1953)

Пусть несжимаемая жидкость притекает к скважине в пласте переменной мощности (см. рис. 1а). Движение предполагается стационарным, осесимметричным и следующим закону Дарси. Проведем на произвольном расстоянии  $r$  цилиндрическую поверхность. Тогда, считая положительным дебит скважины — стока, получим

$$Q = \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \frac{\partial \Phi}{\partial r} 2\pi r dz; \quad (1)$$

$Q$  — дебит;  $\Phi = \frac{k_r}{\mu} \gamma H$  — потенциал;  $k_r$  — проницаемость в направлении  $r$ , которая может зависеть от  $z$ , но не должна зависеть от  $r$ ;  $k_r = k_r(z)$ ;  $\mu$  — абсолютная вязкость;  $\gamma$  — объемный вес;  $H$  — напор;  $h_1(r)$ ,  $h_2(r)$  — уравнения поверхности кровли и подошвы пласта (рис. 1).

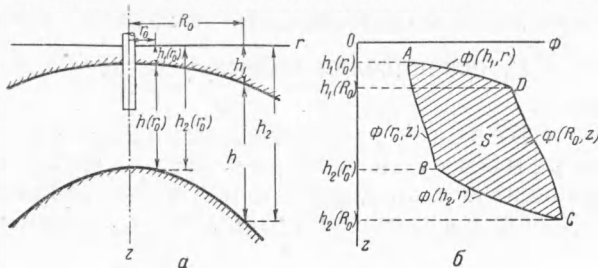


Рис. 1

Потенциал можно также брать в виде  $\Phi = c_r H$ ;  $c_r = c_r(z)$  — коэффициент фильтрации. Пользуясь формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру, уравнение (1) можно представить еще так:

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{d}{d \ln r} \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \Phi(r, z) dz - \Phi[r, h_2(r)] \frac{dh_2(r)}{d \ln r} + \Phi[r, h_1(r)] \frac{dh_1(r)}{d \ln r}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует после интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r_0} = & \int_{h_1(R_0)}^{h_2(R_0)} \Phi(R_0, z) dz - \int_{h_1(r_0)}^{h_2(r_0)} \Phi(r_0, z) dz - \\ & - \int_{h_2(r_0)}^{h_2(R_0)} \Phi[r, h_2(r)] dh_2 + \int_{h_1(r_0)}^{h_1(R_0)} \Phi[r, h_1(r)] dh_1; \end{aligned} \quad (3)$$

$r_0, R_0$  — пределы интегрирования. Правая часть последнего уравнения имеет простой геометрический смысл. Предположим, что известны распределения потенциала в сечениях  $r = r_0, r = R_0$ , а также вдоль поверхностей тока  $h_1(r), h_2(r)$  — кровли и подошвы. Изображая их графически в виде кривых  $AB, DC, AD, BC$ , как показано на рис. 1 б,

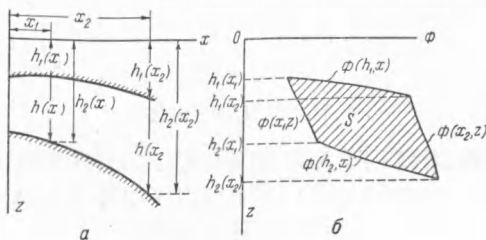


Рис. 2

нетрудно видеть, что правая часть уравнения (3) представляет собой площадь  $S$ , ограниченную этими кривыми. Таким образом,

$$\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r_0} = S. \quad (4)$$

Вполне аналогично для плоского течения в пласте переменной мощности (рис. 2 а и б) также получим для расхода  $q$  в направлении оси  $x$  на единицу ширины потока:

$$q(x_2 - x_1) = \int_{h_1(x_1)}^{h_2(x_1)} \Phi dz - \int_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} \Phi dz + \int_{h_1(x_1)}^{h_2(x_2)} \Phi [x, h_2(x)] dh_2 - \int_{h_1(x_1)}^{h_1(x_2)} \Phi [x, h_1(x)] dh_1 = S. \quad (5)$$

При этом проницаемость может зависеть от  $z$ , но не должна зависеть от  $x, k_x = k_x(z)$ . Под потенциалом подразумевается  $\Phi = \frac{k_x}{\mu} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) = c_x(z) H$ .

Примеры. 1. Безнапорная фильтрация через прямоугольную перемычку на горизонтальном водоупоре (рис. 3). Коэффициент фильтрации постоянный. На границах перемычки  $x_1 = 0$  и  $x_2 = L$  напоры постоянны и равны  $H_1$  и  $H_2$  (рис. 3 а). На сво-

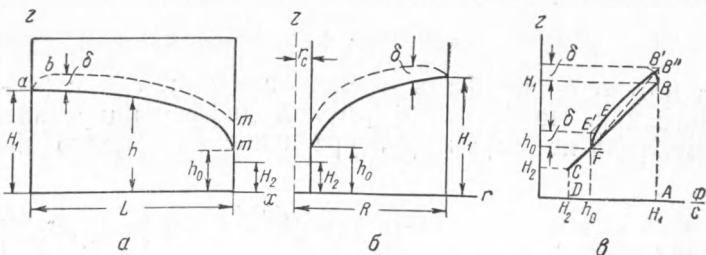


Рис. 3

бодной поверхности напор изменяется линейно по закону  $H = h$  как выше ординаты  $h_0$  промежутка высачивания, так и ниже. Направляя оси  $x, z$  как показано на рис. 3 а, для площади  $S$  в формуле (5) получим трапецию  $ABCD$  (рис. 3 в), причем  $S = \frac{1}{2} c (H_1^2 - H_2^2)$ . Согласно уравнению (5), в котором полагаем  $x_1 = 0, x_2 = L$ , получаем для расхода формулу Дюпюи  $q = c (H_1^2 - H_2^2) / 2L$ .

2. Влияние капиллярного поднятия на дебит при безнапорной фильтрации. Коэффициент фильтрации постоянный во всей зоне, включая капиллярную. Пусть высота капиллярного поднятия в статическом состоянии есть  $\delta$ . Кривая депрессии показана пунктиром на рис. 3а. Примем, в согласии с Н. Е. Жуковским, что на свободной поверхности давление будет ниже атмосферного на величину  $\gamma\delta$ . Под свободной поверхностью имеется в виду поверхность под капиллярными менисками. Рассмотрим участок капиллярного поднятия  $ab$  (рис. 3а). Очевидно, в точке  $a$  напор больше напора в точке  $b$  на весьма малую величину. Распределение потенциала вдоль напорной грани изображится на участке  $0 < z < H_1$  прямой  $AB$  (рис. 3в), а на участке капиллярного поднятия дужкой  $BB'$ . На депрессионной поверхности  $bm$  (рис. 3а) напор линейно уменьшается (прямая  $B'E$  рис. 3в). На капиллярном участке выхода  $mn$  напор в точке  $m$  несколько больше напора  $h_0$  в точке  $n$  — верхней точке промежутка высачивания без учета капиллярности (дуга  $EF$ ). Без практической погрешности можно считать, что криволинейный четырехугольник  $BB'E'FB$  не отличается от параллелограмма  $BB'E'FB$ , и определять  $S$  из уравнения  $S = \text{пл. } ABB'E'FCDA = (H_1 - H_2) \frac{H_1 + H_2}{2} + (H_1 - h_0) \delta$ ,

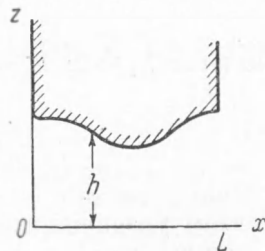


Рис. 4

откуда, согласно (5),  $Q = \frac{cS}{L} = \frac{c}{L} \left[ \frac{H_1^2 - H_2^2}{2} + (H_1 - h_0) \delta \right]$ . Ординату  $h_0$  промежутка высачивания для перемычки можно найти из точных решений, данных в работе П. Я. Кочинной (1). Можно также воспользоваться приближенными методами, изложенными в работах (2, 3).

Аналогично для радиального притока к скважине (рис. 3б) при напорах  $H_1, H_2$ , радиусах скважины и области питания  $r_c$  и  $R$ , согласно (4), получим для  $S$  ту же фигуру, что и для перемычки, показанную на рис. 3в. Без учета капиллярности дебит равен

$$Q = \frac{2\pi c S}{\ln \frac{R}{r_c}} = \frac{\pi c (H_1^2 - H_2^2)}{\ln \frac{R}{r_c}}$$

С учетом капиллярности

$$Q = \frac{2\pi c}{\ln \frac{R}{r_c}} \left[ \frac{H_1^2 - H_2^2}{2} + (H_1 - h_0) \delta \right].$$

Для безнапорного притока к скважине не имеется точных методов расчета промежутка высачивания  $h_0$ . Приближенный метод изложен в работах (2, 3).

В статье (4) и книге (5) в качестве допущения принято  $H_1 - h_0 \approx \approx 1/2 (H_1 - H_2)$ , что дает для дебита скважины формулу

$$Q \approx \frac{2\pi c}{\ln \frac{R}{r_c}} \left[ \frac{H_1^2 - H_2^2}{2} + \frac{1}{2} (H_1 - H_2) \delta \right] = \frac{\pi c}{\ln \frac{R}{r_c}} (H_1 - H_2) (H_1 + H_2 + \delta).$$

Эта формула очень хорошо подтверждается опытами (4, 5). Нетрудно видеть, что она получится, если в качестве приближенного учета капиллярности принять, что капиллярность не изменяет распределения напоров вдоль свободной поверхности и что площадь  $S$  изображается трапецией  $ABB'CDA$ .

3. Расчет горизонтальной сдвигающей силы, действующей на гидротехническое сооружение со стороны грунтового потока. Пусть грунтовый поток с горизонтальным водоупором и известным расходом  $q$  на единицу ширины обтекает подземную часть гидротехнического сооружения (рис. 4). Коэффициент фильтрации постоянный,  $\Phi = c(p/\gamma + z)$ . Тогда в уравнении (5) члены, содержащие  $z$ , сокращаются, и оно принимает вид:

$$\frac{\gamma q}{c}(x_2 - x_1) = \int_{h_1(x_1)}^{h_2(x_1)} p dz - \int_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} p dz + \int_{h_2(x_1)}^{h_2(x_2)} p dh_2 - \int_{h_1(x_1)}^{h_1(x_2)} p dh_1.$$

Полагая  $h_1 = 0$ ;  $h_2 = h$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = L$  (рис. 4), получим

$$\frac{\gamma q L}{c} = \int_0^{h(0)} p dz - \int_0^{h(L)} p dz + \int_{h(0)}^{h(L)} p dh.$$

В этом уравнении первые два интеграла представляют собой силы в сечениях  $x = 0$  и  $x = L$ , а третий, учитывая знаки, — отрицательное значение горизонтальной сдвигающей силы  $-P_x$ , действующей на обтекаемую часть сооружения. Отсюда

$$P_x = P(0) - P(L) - \frac{\gamma q L}{c},$$

где

$$P(0) = \int_0^{h(0)} p dz; \quad P(L) = \int_0^{h(L)} p dz; \quad P_x = - \int_{h(0)}^{h(L)} p dh.$$

Зная распределение напоров в сечениях  $x = 0$  и  $x = L$ , а также расход, из последнего уравнения можно определить  $P_x$ .

Институт механики  
Академии наук СССР

Поступило  
10 VI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> П. Я. Кочина, Теория движения грунтовых вод, 1952. <sup>2</sup> И. А. Чарный, ДАН, 80, № 1 (1951). <sup>3</sup> И. А. Чарный, ДАН, 88, № 5 (1953). <sup>4</sup> R. D. Wyckoff, H. G. Botset, M. Muskat, Physics, 3, № 2 (1932). <sup>5</sup> М. Маскет, Движение однородной жидкости в пористой среде, 1949.