**Доклады Академии Наук СССР**
**1953. Том XCII, № 2**

*ГИДРОМЕХАНИКА*

Ф. И. ФРАНКЛЬ

# К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ НАНОСОВ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VII 1953)*

Теория движения взвешенных наносов в настоящее время еще мало разработана. В имеющихся зачатках теории много спорного*. В связи с этим важно вывести систему основных уравнений движения жидкости со взвешенными наносами, пользуясь исключительно основными законами движения сплошных сред и не прибегая ни к каким допущениям. Система эта, состоящая из двух уравнений неразрывности и шести динамических уравнений (уравнения (11), (12), (19), (20)), является, конечно, неполной, точно так же как известные уравнения Рейнольдса для турбулентного движения чистой жидкости ([1]), и нуждаются в дополнении на основании тех или иных допущений.

1. Основные обозначения; операции осреднения. Жидкость и твердые частицы наносов считаются несжимаемыми. Соответствующие массовые плотности обозначим через $\rho$, $\rho_s$ и проекции скорости на оси декартовых координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ через $u_1$, $u_2$, $u_3$; $u_{s1}$, $u_{s2}$, $u_{s3}$. Массовые силы на единицу массы обозначаются, соответственно, через $X_i$, $X_{si}$ $(i=1, 2, 3)$. Тензор мгновенных напряжений как внутри жидкости, так и внутри твердых частиц обозначим через $p_{ik}$ $(i, k=1, 2, 3)$. Этот тензор считается непрерывным.

Далее вводится разрывная функция $s$, равная единице внутри твердых частиц и равная нулю внутри жидкости; эта функция после осреднения дает мутность $\overline{s}$.

Вводятся операции осреднения. Для этой цели вокруг каждой точки рассматриваемой области 4-мерного мира $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{t})$ опишем 4-мерный цилиндр $Z(\overline{x}, \overline{t})$

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x}_i)^2\leqslant r^2, \quad |t-\overline{t}|<\Delta t, \tag{1}$$

где $r, \Delta t$ — раз навсегда заданные величины.

Обычное осреднение определяется формулой

$$\overline{f}(\overline{x}, \overline{t})=\left\{\iiiint\limits_{Z(\overline{x}, \overline{t})} f\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt\right\}:\left\{\iiiint\limits_{Z(\overline{x}, \overline{t})} dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt\right\}. \tag{2}$$

Далее вводятся осреднение по объемам, занятым жидкостью,

---

* См. в связи с этим дискуссию по теории движения взвешенных наносов, состоявшуюся в 1952 г. на страницах журнала Изв. АН СССР, ОТН.

и осреднение по объемам, занятым твердыми частицами, при помощи следующих формул:

$$f^* = \frac{\overline{f(1-s)}}{1-\overline{s}}, \qquad f_s^* = \frac{\overline{f_s}}{\overline{s}}. \tag{3}$$

2. Уравнения неразрывности. Из несжимаемости твердых частиц следует:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{F(x_1, x_2, x_3)<0} s(x_1, x_2, x_3, t)\, d\overline{x}_1 d\overline{x}_2 d\overline{x}_3 =$$

$$= -\iint\limits_{F(x_1, x_2, x_3)=0} s(x_1, x_2, x_3, t)\, v_{sn}(x_1, x_2, x_3, t)\, dF, \tag{4}$$

где $v_{sn}$ — проекции скорости $\mathbf{v}_s$ по направлению внешней нормали, а $dF$ — элемент произвольно заданной замкнутой поверхности $F(x_1, x_2, x_3) = 0$; $F(x_1, x_2, x_3) < 0$ — внутренняя область этой поверхности.

Заменяя, соответственно, под знаками интегралов:

$$x_i \to \overline{x}_i + \xi_i, \quad t \to \overline{t} + \tau, \tag{5}$$

где $\xi_i, \tau$ — постоянные, а $\overline{x}_i, \overline{t}$ — переменные, получим из (1):

$$\frac{d}{d\overline{t}}\iiint\limits_{F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)<0} s(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, d\overline{x}_1 d\overline{x}_2 d\overline{x}_3 =$$

$$= -\iint\limits_{F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)=0} s(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, v_{sn}(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, d\overline{F}, \tag{6}$$

где $d\overline{F}$ — элемент поверхности $F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0$.

Интегрируем уравнение (3) по 4-мерному цилиндру $Z(\overline{x}, \overline{t})$:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 < r^2, \quad |\tau| < \Delta t. \tag{7}$$

Тогда, вследствие постоянства границ области интегрирования (7), можно поменять местами интегрирование по $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ и дифференцирование по $\overline{t}$; кроме того, разумеется, можно переменить порядок интегрирования по $d\overline{F}$ (или по $d\overline{x}_1 d\overline{x}_2 d\overline{x}_3$) и по $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$. Разделив на объем цилиндра $^4/_3\, \pi r^3 2\Delta t$, получим

$$\frac{d}{d\overline{t}}\iiint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)<0} \overline{s}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{t})\, d\overline{x}_1 d\overline{x}_2 d\overline{x}_3 =$$

$$= -\iint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)=0} \overline{s}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{t})\, v_{sn}^*(\overline{x}_1, \ldots, \overline{t})\, d\overline{F} \tag{8}$$

(здесь учтено, что $\overline{s v_{sn}} = \overline{s} v_{sn}^*$). Заметим далее, что все средние $\overline{f}$ непрерывны и дифференцируемы по координатам и по времени.

Производные по координатам определяются уравнением

$$\operatorname{grad}_{\overline{x}} \overline{f} = \frac{1}{^4/_3\, \pi r^3 2\Delta t} \iiint\limits_{\substack{\Sigma \xi_i^2 < r^2 \\ |\tau| < \Delta t}} f(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, d\mathbf{S}\, d\tau, \tag{9}$$

где $d\mathbf{S}$ — векторный элемент поверхности $\Sigma \xi_i^2 = r^2$, направленный по внешней нормали. Далее имеем

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \frac{1}{^4/_3\, \pi r^3 2\Delta t} \iiint\limits_{\Sigma \xi_i^2 < r^2} [f(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \Delta t) -$$

$$- f(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} - \Delta t)]\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \tag{10}$$

В связи с этим можно в левой части уравнения (5) перенести дифференцирование по $\overline{t}$ под знак интеграла, и имеем, по теореме Остроградского:

$$\iint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)=0} \overline{s}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{t})\, v_{sn}^{*}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{t})\, d\overline{F} =$$

$$= \iiint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)<0} \operatorname{div}_{\overline{x}}(\overline{s}\mathbf{v}_s^{*})\, d\overline{x}_1 d\overline{x}_2 d\overline{x}_3. \tag{11}$$

Следовательно, для произвольного объема

$$\iiint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)<0} \left[\frac{\partial\overline{s}}{\partial\overline{t}} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\overline{s}u_{sk}^{*})}{\partial\overline{x}_k}\right] d\overline{x}_1 d\overline{x}_2 d\overline{x}_3 = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\overline{s}}{\partial\overline{t}} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\overline{s}u_{sk}^{*})}{\partial\overline{x}_k} = 0. \tag{12}$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial(1-\overline{s})}{\partial\overline{t}} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial[(1-\overline{s})\,u_k^{*}]}{\partial\overline{x}_k} = 0. \tag{13}$$

Заметим, что скорости $\mathbf{v}_s^{*}$ и $\mathbf{v}^{*}$ представляют собою скорости центров тяжести твердых и, соответственно, жидких масс, содержащихся в шаре $\sum\limits_{i=1}^{3}(x_i - \overline{x}_i)^2 < r^2$, осредненные за промежуток времени $\overline{t} - \Delta t < t < \overline{t} + \Delta t$.

3. Динамические уравнения. Имеем на основании теоремы о количестве движения:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{F(x_1, \ldots)<0} \rho_s s(x_1, \ldots, t)\, u_{si}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= - \iint\limits_{F(x_1, \ldots)=0} \rho_s s u_{si}(x_1, \ldots, t)\, v_{sn}(x_1, \ldots, t)\, dF - \iint\limits_{\Phi(x_1, \ldots)=0} p_{in}\, d\Phi +$$

$$+ \iiint\limits_{F(x_1, \ldots)<0} \rho_s s X_{si}(x_1, \ldots, t)\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{14}$$

где $\Phi(x_1, x_2, x_3, t) < 0$ — область внутри $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, занятая твердым веществом, а $d\Phi$ — элемент поверхности этой области. Вектор $p_{in}$ — это проекция тензора $p_{ik}$ на внешнюю нормаль поверхности $\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$. Очевидно,

$$\iint\limits_{\Phi(x_1, \ldots)=0} p_{in}\, d\Phi = \iiint\limits_{\Phi(x_1, \ldots)<0} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \iiint\limits_{F(x_1, \ldots)<0} s\, \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{15}$$

После замены (5) и использования равенства (15) получим

$$\frac{d}{d\overline{t}} \iiint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)<0} \rho_s s(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, u_{si}(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, d\overline{x}_1\, d\overline{x}_2\, d\overline{x}_3 =$$

$$= - \iint\limits_{F(\overline{x}_1, \ldots)=0} \rho_s s(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau) \times$$

$$\times u_{si}(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, v_{sn}(\overline{x}_1 + \xi_1, \ldots, \overline{t} + \tau)\, d\overline{F} -$$

$$- \iiint\limits_{F(\bar{x}_1,\dots)<0} s(\bar{x}_1+\xi_1,\dots,\bar{t}+\tau)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial p_{ik}(\bar{x}_1+\xi_1,\dots,\bar{t}+\tau)}{\partial \bar{x}_k}\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3 + \iiint\limits_{F(\bar{x}_1,\dots)<0} \rho_s s(\bar{x}_1+\xi_1,\dots)\, X_{si}(\bar{x}_1+\xi_1,\dots)\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3. \qquad (16)$$

Интегрируя по цилиндру $Z(\bar{x}, \bar{t})$ и разделив на его объем, получим

$$\frac{d}{d\bar{t}} \iiint\limits_{F(\bar{x}_1,\dots)<0} \rho_s \overline{s u_{si}}\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3 = - \iint\limits_{F(\bar{x}_1,\dots)=0} \rho_s \overline{s u_{si} v_{sn}}\, d\bar{F} - \iiint\limits_{F(\bar{x}_1,\dots)<0} \overline{\sum_{k=1}^{3} s \frac{\partial p_{ik}}{\partial \bar{x}_k}}\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3 + \iiint\limits_{F(\bar{x}_1,\dots)<0} \rho_s \overline{s X_{si}}\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3. \qquad (17)$$

Пусть

$$\begin{aligned} u_{si}(\bar{x}_1+\xi_1,\dots,\bar{t}+\tau) &= u^*_{si}(\bar{x}_1,\dots,\bar{t}) + u'_{si}(\bar{x}_1,\dots,\bar{t};\xi_1,\dots,\tau),\\ p_{ik}(\bar{x}_1+\xi_1,\dots,\bar{t}+\tau) &= \bar{p}_{ik}(\bar{x}_1,\dots,\bar{t}) + p'_{ik}(\bar{x}_1,\dots,\bar{t};\xi_1,\dots,\tau),\\ s(\bar{x}_1+\xi_1,\dots,\bar{t}+\tau) &= \bar{s}(\bar{x}_1,\dots,\bar{t}) + s'(\bar{x}_1,\dots,\bar{t};\xi_1,\dots,\tau). \end{aligned} \qquad (18)$$

Подставив выражения (18) в уравнения (17) и пользуясь теоремой Остроградского, получим:

$$\rho_s \frac{\partial(\bar{s} u^*_{si})}{\partial \bar{t}} + \rho_s \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial[\bar{s} u^*_{si} u^*_{sk}]}{\partial \bar{x}_k} = - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial[\rho_s \bar{s}(u'_{si}u'_{sk})^*]}{\partial \bar{x}_k} - \bar{s}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial \bar{x}_k} - \overline{\sum_{k=1}^{3} s' \frac{\partial p'_{ik}}{\partial \bar{x}_k}} + \rho_s \bar{s} X^*_{si} \qquad (19)$$

и, соответственно,

$$\rho \frac{\partial[(1-\bar{s})u^*_i]}{\partial \bar{t}} + \rho \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial[(1-\bar{s})u^*_i u^*_k]}{\partial \bar{x}_k} = - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial[\rho(1-\bar{s})(u'_i u'_k)^*]}{\partial \bar{x}_k} - (1-\bar{s})\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial \bar{x}_k} + \overline{\sum_{k=1}^{3} s' \frac{\partial p'_{ik}}{\partial \bar{x}_k}} + \rho(1-\bar{s})X^*_i. \qquad (20)$$

Тензоры

$$\Pi_{sik} = \rho_s \bar{s}(u'_{si}u'_{sk})^*, \quad \Pi_{ik} = \rho(1-\bar{s})(u'_i u'_k)^* \qquad (21)$$

это добавочные напряжения, возникающие в турбулентных течениях вследствие беспорядочных движений; в частности, тензор $\Pi_{sik}$ аналогичен осмотическому давлению в растворах. Вектор $\bar{s}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \bar{p}_{ik}}{\partial \bar{x}_k}$ — это обобщенная архимедова сила, вызванная осредненными микроскопическими напряжениями $\bar{p}_{ik}$ и действующая на твердые частицы, содержащиеся в единице объема. Наконец, вектор

$$R_i = \overline{\sum_{k=1}^{3} s' \frac{\partial p'_{ik}}{\partial \bar{x}_k}} \qquad (22)$$

должен быть истолкован как осредненная сила сопротивления жидкости движению твердых частиц.

Киргизский государственный университет

Поступило 7 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 2, 1948.