Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 1

ГЕОФИЗИКА

А. Г. КОЛЕСНИКОВ

ХОД ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДЫ В ВОДОХРАНИЛИЩЕ В ЗИМНИЙ ПЕРИОД

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 2 VII 1953)

Формирование термического режима вод любого водохранилища происходит под влиянием теплообмена как на верхней границе, т. е. с атмосферой, так и на нижней границе, т. е. с грунтом, слагающим дно. Тепловой эффект этих двух потоков в различные сезоны года различен. Если в теплый период года, когда поверхность воды свободна от льда, основным является первый, т. е. теплообмен с атмосферой, то в зимний период, при наличии ледяного покрова, резко снижающего теплообмен с атмосферой, существенное значение приобретает также и второй — теплообмен с дном. Большинство опубликованных работ посвящено изучению термического режима водохранилищ в летний период, исследования зимнего теплового режима вод почти отсутствуют.

В настоящей работе мы попытаемся дать решение задачи о формировании хода температур воды в водохранилище в зимний период.

Представим водохранилище глубиной h и достаточной протяженности, на поверхности которого уже образовался ледяной покров. Процессы, протекающие с этого момента (его мы примем за начальный для поставленной задачи), во многом определяются предшествующим термическим режимом.

В результате действия всех составляющих теплообмена на поверхности водохранилища происходит: в летнее время — постепенное накопление тепла как водой, так и некоторым слоем грунта, слагающим дно, осенью же, наоборот, расход аккумулированного летом тепла, причем расходуется тепло водными массами и грунтом по-разному. К моменту образования сплошного ледяного покрова слой воды толщиной h, находясь почти весь при нулевой температуре, будет обладать очень малым количеством тепла, слой же грунта из-за плохой проводимости сохранит еще достаточные его запасы. Количественную оценку их можно провести, пользуясь кривой распределения температур в грунте к моменту образования ледяного покрова. Последняя же, как будет показано ниже, легко находится из решения задачи о ходе температуры грунта за летний и осенний периоды.

Следовательно, в течение зимы будет иметь место постепенный подогрев воды в водохранилище за счет тепловых запасов грунта.

Примем, что скорости течения воды под льдом настолько малы, что адвективный перенос тепла отсутствует, обмен тепла тогда будет происходить только по вертикали и осуществляться турбулентной теплопроводностью. Условимся приписывать всем величинам, относящимся к воде, индексы 1, к грунту — индексы 2. При сформулированных условиях для распределения температур в воде справедливо уравнение турбулентного обмена

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2}, \quad -h < z < 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям: на границе лед — вода процессом льдообразования поддерживается неизменно нулевая температура:

$$z = -h, \quad t_1 = 0; \tag{2}$$

на границе вода — грунт должно выполняться постоянство температур и тепловых потоков:

$$z = 0, \quad \begin{cases} t_1 = t_2, & (3) \\ c_1 \rho_1 k_1 \dfrac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_2 \dfrac{\partial t_2}{\partial z}. & (4) \end{cases}$$

Кроме того, уравнение (1) должно удовлетворять начальному условию

$$\tau = 0, \quad t_1 = f(z). \tag{5}$$

Соответственно для грунта справедливо уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2}, \quad 0 < z < H, \tag{6}$$

подчиняющееся граничным условиям (3), (4), а также условию постоянства температур на глубине H годовых нулевых амплитуд в грунте, слагающем дно водохранилища:

$$z = H, \quad t_2 = \vartheta, \tag{7}$$

и начальному, характеризующему в какой-то мере запас тепла в грунте к моменту образования ледяного покрова:

$$\tau = 0, \quad t_2 = \Phi(z). \tag{8}$$

Здесь приняты следующие обозначения: k_1 — коэффициент турбулентного обмена водных масс, c_1 и ρ_1 — соответственно, теплоемкость и плотность воды, a_2 — коэффициент температуропроводности грунта, λ_2 — коэффициент теплопроводности грунта.

Такая постановка задачи не является строгой. При строгой постановке условия (2) на границе лед — вода недостаточно, так как само h за счет роста льда в толщину изменяется с течением времени. Для исчерпывающей формулировки необходимо было бы задать на этой же границе еще уравнение баланса тепла, описывающее механизм роста льда, а следовательно, и изменения h со временем. Последнее влечет за собой необходимость рассмотрения температурного поля еще и третьей среды, т. е. ледяного покрова, что вместе с нелинейными краевыми условиями на его нижней границе значительно осложнило бы поставленную задачу. В этом случае она свелась бы к сложной системе интегро-дифференциальных уравнений, решение которых нельзя получить в эффективном виде.

Распределение температур в грунте $\Phi(z)$ найдем, решив предварительно задачу об аккумуляции тепла грунтом за летний период и расхода его осенью. Аппроксимируя фактическую кривую годового хода придонных температур воды в водохранилище в интервале от начала летнего нагрева до ледостава функцией

$$t_1(\tau) = \bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{m=i} \left\{ A_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} + B_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} \right\}, \tag{9}$$

распределение температур в грунте, вызываемое этим ходом, получим в результате решения уравнения (6) при условии на границе раздела:

$$z = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} = \alpha_2 \{t_2 - t_1(\tau)\} \tag{10}$$

и условии (7), т. е.

$$\Phi(\tau) = \vartheta - \frac{\alpha_2(\vartheta - \bar{t}_1)}{\lambda_2 + \alpha_2 H}(H - z) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=i} \eta_m D_m e^{-\sqrt{\frac{\pi m}{a_2 T}}z} \cos\left\{\frac{2\pi m \tau_0}{T} - \sqrt{\frac{\pi m}{a_2 T}}z - \varepsilon_m - \beta_m\right\}, \tag{11}$$

где $D_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$, $\eta_m = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\left\{\frac{2\pi m}{a_2 T} + 2\frac{\alpha_2}{\lambda_2}\sqrt{\frac{\pi m}{a_2 T}} + \left(\frac{\alpha_2}{\lambda_1}\right)^2\right\}^{-1/2}$, $\varepsilon_m =$ $= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\sqrt{\frac{a_2 T}{\pi m}}}$, $\beta_m = \operatorname{arc\,tg}\frac{B_m}{A_m}$, α_2 — коэффициент теплоотдачи грунт — вода, τ_0 — момент образования сплошного ледяного покрова.

Решение уравнений (1) и (6) будем искать в виде

$$t_1(z, \tau) = \frac{\vartheta(h + z)}{h + \frac{c_1\rho_1 k_1}{\lambda_2}H} + U_1(z, \tau), \tag{12}$$

$$t_2(z, \tau) = \vartheta - \frac{\vartheta(H - z)}{\frac{\lambda_2}{c_1\rho_1 k_1}h + H} + U_2(z, \tau). \tag{13}$$

Полагая $U(z, \tau)$ в виде произведения двух независимых функций, одна из которых зависит только от z, а другая от τ, и подставляя ее в уравнения (1) и (6), в результате удовлетворения граничным условиям (2), (3), (4) и (7) будем иметь:

$$U(z, \tau) = \begin{cases} Ce^{-\sigma_n^2\tau}\dfrac{\sin\nu_n(h + z)}{\cos\nu_n h}, & -h < z < 0 \quad (14) \\ Ce^{-\sigma_n^2\tau}\gamma\dfrac{\sin\mu_n(H - z)}{\cos\mu_n H}, & 0 < z < H. \quad (15) \end{cases}$$

В свою очередь σ_n определяется из следующего характеристического уравнения, имеющего бесконечное множество корней:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_n}{\sqrt{k_1}}h = -\operatorname{tg}\frac{\sigma_n}{\sqrt{a_2}}H, \quad \gamma = \frac{\sqrt{c_1^2\rho_1^2 k_1}}{\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}}, \quad \nu_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{k_1}}, \quad \mu_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{a_2}}. \tag{16}$$

Произвольную постоянную C найдем, удовлетворив начальным условиям. В результате для хода температур воды в водохранилище за зимний период получим следующее:

$$t_1(z, \tau) = \frac{\vartheta(h + z)}{h + \frac{c_1\rho_1 k_1}{\lambda_2}H} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\nu_n(z + h)\cos^2\mu_n H}{h\cos^2\mu_n H + \frac{c_1\rho_1 k_1}{\lambda_2}H\cos^2\nu_n h}e^{-\sigma_n^2\tau} \times$$

$$\times \int_{-h}^{0}\{f(z) - S_1(z)\}\, S_m\nu_n(h + z)\, dz -$$

$$-2\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{a_2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_m\nu_n(z + h)\cos\nu_n h\cos\mu_n H}{h\cos^2\mu_n H + \frac{c_1\rho_1 k_1}{\lambda_2}H\cos^2\nu_n h}e^{-\sigma_n^2\tau} \times$$

$$\times \int_{0}^{H}\{\Phi(z) - S_2(z)\}\sin\mu_n(H - z)\, dz. \tag{17}$$

Полученное выражение состоит из трех слагаемых. Первое из них характеризует стационарное распределение температур, к нему t_1 стремится при $\tau \to \infty$. Практически это может достигаться в некоторых случаях лишь к концу зимы.

Второе слагаемое отражает изменения, обусловленные отклонением начального распределения температуры воды в момент образования сплошного ледяного покрова от стационарного. В сумме два первых слагаемых описывают во времени постепенный нагрев воды от начального до стационарного состояния.

Наибольший интерес представляет третье слагаемое: оно показывает, как повышается температура воды под льдом по мере прогрева ее за счет запасов тепла, сохраненных грунтом. Для количественной оценки эффекта этого нагрева приведем результаты расчета. При его проведении было принято: $h = 8{,}0$ м, $H = 12{,}0$ м, $c_1 = 1$ кал / г·град, $\rho_1 = 1$ г / см³, $k_1 = 6 \cdot 10^{-2}$ см² / сек, $c_2 = 0{,}25$ кал / г·град, $\rho_2 = 2{,}0$ г / см³, $\lambda_2 = 7 \cdot 10^{-3}$ кал / см·град·сек.

Распределение температур в грунте в момент ледостава определялось в соответствии с выражением (11) по ходу температуры воды в водохранилище за летний период, который можно характеризовать следующими основными данными: максимум летнего нагрева 21,0°, ледостав наблюдался через 136 суток после наступления максимума. Всю кривую удалось аппроксимировать с достаточной точностью тремя первыми членами суммы. В результате решения уравнения (16) было найдено: $\sigma_1 = 2{,}76 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_2 = 6{,}46 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_3 = 9{,}23 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_4 = 12{,}05 \cdot 10^{-4}$.

Расчет повышения температуры воды, описываемого третьим слагаемым (17), велся для глубины в 4,0 м, т. е. для среднего значения h. Вычисления показали, что для описания моментов времени, близких к начальному, приходится прибегать к сравнительно большому числу членов ряда, однако, начиная с значений $\tau \geqslant 7$ суткам, которые только и представляют практический интерес, достаточно ограничиться лишь тремя первыми членами. Сумма их дает кривую, обладающую максимумом. Максимум, соответствующий 0,64°, наблюдается через 50 суток после ледостава. С течением времени запасы тепла в грунте иссякают и нагрев им воды падает; к концу зимы он составляет 0,43°.

Естественно, что повышение температуры воды с глубиной растет, максимальное изменение температуры в придонном слое достигает 1,4°, а сама температура 1,768°. Анализ показывает, что величина повышения температуры воды зависит от запасов тепла в воде и грунте в начальный момент, от величины h и H, тепловых свойств грунта и коэффициента турбулентного обмена тепла k_1. Вместе с ростом последнего, что связано с увеличением скорости течения воды, величина зимнего нагрева падает. Положение максимума на кривой хода температур определяется величинами h и H и тепловыми характеристиками воды и грунта. Увеличение скорости течения или уменьшение глубины водохранилища приводит к перемещению максимума в сторону начала образования сплошного ледяного покрова; наоборот, уменьшение скорости течения или увеличение h влечет за собой запаздывание максимума. Возможны случаи, когда он может и не достигаться в течение зимнего периода; тогда кривые изменения температуры воды будут носить плавно возрастающий характер. Все эти выводы хорошо согласуются с результатами непосредственных измерений температуры воды в водохранилищах, выполненных К. И. Россинским ([1]).

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
5 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Крицкий, М. Ф. Менкель, К. И. Россинский, Зимний термический режим водохранилищ, рек и каналов, М.—Л., 1947.