Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Я. ХАВИНСОН

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 VII 1953)

В настоящей заметке устанавливается, что решениями многих нелинейных экстремальных задач в классе ограниченных функций служат функции, отображающие область на многолистный круг.

§ 1. Рассмотрим n-связную, конечную область G, ограниченную n замкнутыми аналитическими контурами. Через Γ будет обозначаться полная граница G. Рассмотрим класс B^1 однозначных, аналитических в G функций, ограниченных по модулю единицей. Введем в рассмотрение линейные функционалы:

$$e_k(f) = \int\limits_\Gamma f(x)\,\omega_k(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{1}$$

Относительно функций $\omega_k(x)$ предполагается, что они аналитичны на каждом из контуров, входящих в Γ, причем ни на одном из контуров никакая их линейная комбинация не совпадает ни с одной функцией из класса E_1 (класс E_1 состоит из функций, представимых в области G интегралом Коши через свои граничные значения). Если в r-мерном комплексном пространстве E^r взять множество A_r точек $(l_1(f), \ldots, l_r(f))$, $f \in B^1$, то A_r — замкнутое, выпуклое тело, каждой граничной точке которого соответствует единственная функция $f^*(z)$, которая либо тождественна константе $e^{i\alpha}$, либо отображает G на m-листный единичный круг $(m \geqslant n)$. Приведенное утверждение сформулировано в ([1])*. Из него немедленно получается следующая, довольно общая теорема о нелинейных экстремальных задачах.

Теорема 1. *Если функция $\varphi(c_1, \ldots, c_r)$ заданная на A_r, такова, что* $\sup|\varphi(c_1, \ldots, c_r)|$ *достигается только на границе A_r, то для задачи о*

$$\sup_{f \in B^1} |\varphi(l_1(f), \ldots, l_r(f))|$$

экстремальными могут быть только или константы $e^{i\alpha}$, или функции $f^*(z)$, отображающие область на многолистный единичный круг.

Замечание 1. Условию теоремы удовлетворяет, например, любая функция $\varphi(c_1, \ldots, c_r)$, определяющая в A_r аналитический элемент.

---

* В теоремах 4—6 работы ([1]) не оговорена возможность $f^*(z) \equiv \mathrm{const}$. Пользуюсь случаем устранить эту неточность.

Замечание 2. Вместо задачи о $\sup|\varphi|$ можно рассматривать любую другую экстремальную задачу, например задачу о $\inf \operatorname{Re} \varphi(c_1, \ldots, c_r)$ и т. п.

Замечание 3. В этой теореме, как и во всех следующих, подразумевается, что число листов многолистного круга не менее, чем n. В дальнейшем это особо оговариваться не будет.

В частности из теоремы 1 следует такая теорема.

Теорема 2. *Пусть комплексные числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ удовлетворяют условию $0 \leqslant \arg \lambda_k \leqslant \pi/2$, $k = 0, \ldots, r$, а числа p_k, $k = 0, \ldots, r$ положительны. Обозначим через c_k k-й коэффициент степенного разложения функции $f(z)$ в окрестности фиксированной точки $a \in G$. Тогда:*

$$\sup_{f \in B^1} \sum_{k=0}^{r} \lambda_k |c_k|^{p_k}$$

достигается только для функций $f^*(z)$, которые либо тождественные константы вида $e^{i\alpha}$, либо отображают G на многолистный единичный круг.

§ 2. Пусть на некотором метрическом пространстве E определена неотрицательная мера $\mu(l)$. Возьмем измеримое множество $R \subset E$ конечной меры. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть задана функция $\omega(x, t)$, $x \in \Gamma$, $t \in R$, ограниченная на $\Gamma \times R$ и обладающая следующим свойством: существует такое число $p \geqslant 1$, что для любой $f(z) \in B^1$ функция*

$$\omega_f(x) = \int_R \left\{ \left[\left| \int_\Gamma f(x)\, \omega(x, t)\, dx \right|^{p-1} e^{-i \arg \int_\Gamma f(x) \omega(x, t)\, dx} \right] \omega(x, t) \right\} d\mu$$

аналитична на Γ и не совпадает ни на одном из контуров ни с одной функцией, принадлежащей в области G к классу E_1.

При этих предположениях экстремальными для задачи о

$$\sup_{f \in B^1} \int_R \left\{ \left| \int_\Gamma f(x)\, \omega(x, t)\, dx \right|^p \right\} d\mu$$

могут быть только функции $f^*(z)$, которые либо являются константами $e^{i\alpha}$, либо отображают G на многолистный единичный круг.

Доказательство. Положим:

$$\Phi_f(t) = \int_\Gamma f(x)\, \omega(x, t)\, dx,$$

$$L(f) = \int_R \left\{ \left| \int_\Gamma f(x)\, \omega(x, t)\, dx \right|^p \right\} d\mu = \int_R |\Phi_f(f)|^p\, d\mu, \quad \lambda = \sup_{f \in B^1} L(f).$$

Докажем сперва существование функций $f^*(z)$, для которых $L(f^*) = \lambda$. Пусть последовательность $\{f_n(z)\} \subset B^1$ такова, что $L(f_n) \to \lambda$. Можно считать последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходящейся внутри G к функции $f^*(z)$. Из теоремы 13.2 гл. II книги (2) * следует, что при всех t имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_{f_n}(t) = \Phi_{f^*}(t).$$

* Нужная нам теорема доказана в этой книге для случая, когда G — единичный круг, но она верна и в рассматриваемом сейчас случае.

Следовательно, так как все $\Phi_f(t)$ равномерно ограничены, получаем:

$$L(f^*) = \int_R \left|\Phi_{f^*}(t)\right|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_R \left|\Phi_{f_n}(t)\right|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} L(f_j) = \lambda.$$

Рассмотрим теперь линейный функционал:

$$l(f) = \int_\Gamma f(x)\, \omega_{f^*}(x)\, dx.$$

Имеем:

$$l(f) = \int_\Gamma f(x) \{ \int_R [\,|\Phi_{f^*}(t)|^{p-1} e^{-i \arg \Phi_{f^*}(t)} \omega(x, t)]\, d\mu\}\, dx =$$

$$= \int_R |\Phi_{f^*}(t)|^{p-1} e^{-i \arg \Phi_{f^*}(t)} \Phi_f(t)\, d\mu.$$

Применяя неравенство Гельдера (для $p > 1$), отсюда найдем:

$$\|l\| \leqslant \lambda.$$

С другой стороны, $l(f^*) = \lambda$. Таким образом, для функционала $l(f)$ функция $f^*(z)$ будет экстремальной. Из теоремы 3 работы ([1]) вытекает теперь (ведь $\omega_{f^*}(x)$ по условию аналитична на Γ), что либо $f^*(z) \equiv e^{i\alpha}$, либо $f^*(z)$ отображает G на многолистный единичный круг.

Замечание 4. Идея примененная нами для доказательства теоремы 3, принадлежит Г. М. Голузину ([3]).

Из теоремы 3 вытекают такие результаты:

Теорема 4. *Пусть в области G задана совокупность* K *спрямляемых дуг, сумма длин которых конечна. Предположим еще, что* K *находится на положительном расстоянии от* Γ. *Наибольшая сумма длин образов этих дуг при отображениях G функциями класса B^1 достигается для некоторых отображений G на многолистный единичный круг и только для таких отображений.*

Теорема 5. *Пусть в области G задано множество D положительной плоской меры, находящееся на положительном расстоянии от* Γ. *Наибольшая площадь образа D при отображениях G функциями класса B^1 достигается для некоторых отображений G на многолистный единичный круг и только для таких отображений.*

Замечание 5. Можно было бы ввести классы B_n^1, состоящие из n-х производных функций класса B^1. Поставив для них задачи, рассмотренные для B^1 в теоремах 4 и 5, получили бы, что экстремальными будут функции, являющиеся n-ми производными от функций, отображающих G на многолистный единичный круг.

В заключение автор выражает благодарность проф. А. И. Маркушевичу за внимание к данной работе.

Елецкий государственный учительский институт

Поступило 27 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Я. Хавинсон, ДАН, 88, № 6 (1953). [2] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, 1950. [3] Г. М. Голузин, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, в. 18 (1946).