Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. С. ФЕЛЬДМАН

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ p-ЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 VII 1953)

§ 1. Обобщение одной теоремы Г. М. Голузина. Г. М. Голузиным установлена (1) оценка среднего модуля для регулярных и однолистных в $|z|<1$ функций вида:

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots$$

В настоящей работе теорема Г. М. Голузина обобщается на клаас S_p регулярных и p-листных в $|z|<1$ функций вида:

$$f(z)=c_pz^p+c_{p+1}z^{p+1}+\ldots$$

(p — целое, положительное).

Теорема 1. *Если $f(z)\in S_p$ и при $0\leqslant r<1$ имеем*

$$m(r)=\sum_{n=p}^{\infty}|c_n|^2r^n\leqslant m_0r, \tag{1}$$

где функция $m_0(r)$, $m_0(0)=0$, такова, что $m_0(r)$ и $m_0'(r)$ непрерывны в $0\leqslant r<1$ (под $m_0'(0)$ понимается производная справа) и $m_0'(r)$ не убывает, то при $0<\lambda<2$ и $0<r<1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta\leqslant\lambda p^{1-\frac{\lambda}{2}}\int_0^r m_0'(r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^{\lambda-1}\,dr. \tag{2}$$

Оценка (2) точная. Знак равенства достигается в ней для функции

$$f(z)=az^p, \tag{3}$$

где a — любое комплексное число.

Доказательство. Положив

$$I_{r,\lambda}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}\,d\theta\qquad(0<\lambda<2;\quad 0<r<1)$$

и

$$f(z)=Re^{i\Phi},\quad z=re^{i\theta}=x+iy,$$

имеем

$$r\frac{\partial I_{r,\lambda}}{\partial r}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r\frac{\partial R^{\lambda}}{\partial r}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda R^{\lambda}\frac{\partial\ln R}{\partial\ln r}\,d\theta. \tag{4}$$

Преобразуя правую часть (4) так же, как это сделано у Г. М. Голузина ([1]), получим

$$r\frac{\partial I_{r,\lambda}}{\partial r}=\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint\limits_{B_r}\frac{ds}{R^{2-\lambda}}\qquad (ds=R\,dR\,d\Phi)\,,\tag{5}$$

где B_r — образ круга $|z|<r$, а ds — элемент площади на римановой поверхности B_r.

Обозначим множество тех точек B_r, которые покрыты k раз ($k=1, 2, \ldots, p$), через E_k. Каждое множество E_k является k-листным многообразием и представляет собой k одинаковых множеств, расположенных одно над другим на римановой поверхности B_r. Пронумеруем в каждом многообразии указанные множества в любом порядке.

Обозначим множество, состоящее из всех j-х листов указанных многообразий, через B_j ($j=1, 2, \ldots, p$). Все B_j квадрируемы и

$$\iint\limits_{B_r}\frac{ds}{R^{2-\lambda}}=\sum_{j=1}^{p}\iint\limits_{B_j}\frac{ds}{R^{2-\lambda}}\,.\tag{6}$$

Обозначив через S_j площадь множества B_j ($j=1, 2, \ldots, p$), отметим, что интеграл $\iint\limits_{B_j}\frac{ds}{R^{2-\lambda}}$ не превосходит того же интеграла, взятого по кругу $|w|<\sqrt{\frac{S_j}{\pi}}$.

Из (5) и (6) получаем

$$r\frac{\partial I_{r,\lambda}}{\partial r}\leqslant\frac{\lambda^2}{2\pi}\sum_{j=1}^{p}\iint\limits_{|w|<\sqrt{S_j/\pi}}\frac{ds}{R^{2-\lambda}},\tag{7}$$

или

$$r\frac{\partial I_{r,\lambda}}{\partial r}\leqslant\lambda\sum_{j=1}^{p}\rho_j^{\lambda},\tag{8}$$

где ρ_j — радиус круга с площадью S_j. Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{p}\rho_j^2=\frac{S(r)}{\pi},\tag{9}$$

где $S(r)$ — площадь римановой поверхности B_r.

Для $x_j\geqslant 0$ ($j=1, 2, \ldots, p$) и $0<\mu<1$ известно ([2]) неравенство

$$\sum_{j=1}^{p}x_j^{\mu}\leqslant p^{1-\mu}\Big(\sum_{j=1}^{p}x_j\Big)^{\mu}.\tag{10}$$

Полагая в (10) $x_j=\rho_j^2$ ($j=1, 2, \ldots, p$) и $\mu=\lambda/2$, с учетом (8) и (9) находим

$$r\frac{\partial I_{r,\lambda}}{\partial r}<\lambda p^{1-\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{S(r)}{\pi}\right)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Проинтегрировав это неравенство от 0 до r, получим

$$I_{r,\lambda}\leqslant\lambda p^{1-\frac{\lambda}{2}}\int_0^r\left(\frac{S(r)}{\pi}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{dr}{r}.\tag{11}$$

По теореме площадей [3], справедливой и для многолистных функций,

$$S(r)=\pi\sum_{n=p}^{\infty}n|c_n|^2 r^{2n}.$$

На основании введенного выше обозначения (1) получаем отсюда, что

$$\left(\frac{S(r)}{\pi}\right)^{\frac{\lambda}{2}}=m'(r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^{\lambda}.$$

Следовательно, неравенство (11) можно переписать так:

$$I_{r,\lambda}\leqslant\lambda p^{1-\frac{\lambda}{2}}\int_0^r m'(r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^{\lambda-1}dr. \qquad (12)$$

Последний интеграл оценивается по неравенству Гельдера так же, как в работе [1]:

$$\int_0^r m'(r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^{\lambda-1}dr\leqslant\int_0^r m_0'(r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^{\lambda-1}dr. \qquad (13)$$

Отметим лишь, что при этом можно ограничиться требованием неубывания функции $m_0'(r)$.

Неравенство (12) в сочетании с (13) и дает требуемую оценку (2). Легко проверить, что для функции (3), если положить $m_0(r)=m(r)=|a|^2r^p$, в формуле (2) будем иметь знак равенства, т. е. установленная оценка (2) является точной.

Следствие 1. *Полагая в доказанной теореме* 1 $p=1$, $c_1=1$, *получим теорему Г. М. Голузина* [1].

Следствие 2. *Если в теореме* 1 *положим*

$$m_0(r)=m(r)=\sum_{n=p}^{\infty}|c_n|^2r^n,$$

то из оценки (2) *для* $f(z)\subset S_p$ *и* $0<\lambda<2$ *получим формулу Биернаки* [4]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta\leqslant\lambda p\int_0^r\frac{M(r)^{\lambda}}{r}dr, \qquad (14)$$

где $f(z)\leqslant M(r)$ *для* $|z|\leqslant r$.

Доказательство этого следствия легко провести, если учесть, что

$$S(r)\leqslant p\pi M(r)^2.$$

Замечание. В работе Г. М. Голузина [5] методом, отличным от примененного в работе [1], устанавливается оценка среднего модуля любых регулярных и p-листных в $|z|<1$ функций и притом для всех положительных λ. Однако полученная Г. М. Голузиным оценка не является точной. Именно, легко показать, что в частном случае $f(z)\in S_p$ и $0<\lambda<2$ она грубее точной оценки (2).

§ 2. Оценки коэффициентов p-листных функций. В работе Ю. Е. Аленицына [6] устанавливается порядок оценки коэффициентов регулярных и p-листных в $|z|<1$ функций вида:

$$f(z)=z^q+c_{k+q}z^{k+q}+c_{2k+q}z^{2k+q}+\ldots$$

(k, q — целые положительные), не принимающих в $0<|z|<1$ значения 0.

Рассмотрим класс $S_p^{(k)}$ регулярных и p-листных в $|z|<1$ функций вида

$$f(z)=z^p+c_{k+p}z^{k+p}+c_{2k+p}z^{2k+p}+\ldots$$

Воспользовавшись точной оценкой Хаймана для модуля p-листной функции ([7]), формулой (14) и результатами работы ([6]), можно получить численные оценки коэффициентов класса $S_p^{(k)}$.

Теорема 2. *Если* $f(z)\in S_p^{(k)}$, $p\geqslant 2$, $k\leqslant p-1$, *то для всех* n

$$|c_n|<\frac{pe^{\frac{1}{k}}}{2p-k}n^{\frac{2p}{k}-1}.$$

Теорема 3. *Если* $f(z)\in S_p^{(k)}$, $p\geqslant 2$, $p<k<2p$, *то для всех* n

$$|c_n|<\frac{pke^{\frac{1}{p-1}}}{(p-1)(2p-k)}n^{\frac{2p}{k}-1}.$$

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **22** (64), 3, 373 (1948). [2] В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, 1950. [3] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, **3**, 2, изд. 4-е, § 39, 1950. [4] M. Biernacki, C. R., **203**, № 8, 449 (1936). [5] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **25** (67), 2, 307 (1949). [6] Ю. Е. Аленицын, Матем. сборн., **10** (52), 1—2, 57 (1942). [7] W. K. Hayman, Tech. Rep., No. 11, Navy Contract No. 6-ori-106, Task Order 5, Stanford University, Calif. (1950).