Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 VII 1953)

Пусть (B) — конечносвязная область плоскости ζ с границей (C) и пусть (Σ) — класс функций $F(\zeta)$, однолистных и мероморфных в (B) и представимых в форме

$$F(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}+K(\zeta), \quad z\neq\infty,$$

$$F(\zeta)=z+K(\zeta), \quad z=\infty,$$

где $z\in(B)$, а $K(\zeta)$ регулярна в (B).

В ряде работ Г. М. Голузин решал различными методами задачу об оценке в классе (Σ) функционала

$$R\left(e^{-2i\theta}\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\log\frac{F(\zeta_i)-F(\zeta_j)}{\zeta_i-\zeta_j}\right), \tag{1}$$

где θ — вещественное число, $\gamma_{ij}=\gamma_{ji}$ — комплексные числа и ζ_i — точки из (B).

Здесь рассматриваются те ветви логарифмической функции, которые обращаются в нуль при $\zeta_i=\infty$.

В настоящей заметке мы сравнительно элементарным методом, применявшимся, впрочем, ранее, получаем часть результатов Г. М. Голузина и некоторые новые результаты, относящиеся к упомянутой выше задаче.

Как известно, квадратичная форма

$$K(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}x_ix_j$$

представима в форме

$$K(x)=\sum_{k=1}^{m}y_k^2, \qquad y_k=\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ks}x_s \qquad (m\leqslant n). \tag{2}$$

Введем эрмитову форму

$$H(x)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ks}x_s\sum_{s=1}^{n}\overline{\alpha_{ks}}\,\overline{x_s}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}x_i\overline{x_j}. \tag{3}$$

Пусть

$$j_\theta(\zeta,z,\zeta')=\frac{1}{\zeta-z}+\varphi(\zeta); \quad j_\theta(\zeta',z,\zeta')=0, \quad \zeta' \text{ и } z\in(B),$$

однолистно отображает (B) на плоскость w разрезами по дугам логарифмических спиралей $\zeta(e^{-i\theta}\log w)=\text{const}$ (для образа каждой связной части (C) постоянная может быть различной). Существование и единственность $j_0(\zeta, z, \zeta')$ установлена Кёбе [1].

Положим

$$p(\zeta, z, \zeta') = \sqrt{j_0(\zeta, z, \zeta')\, j_{\pi/2}(\zeta, z, \zeta')}; \quad q(\zeta, z, \zeta') = \sqrt{\frac{j_0(\zeta, z, \zeta')}{j_{\pi/2}(\zeta, z, \zeta')}};$$

при этом корни определены так, что первые коэффициенты разложения p и q в окрестности $\zeta = z$ равны 1. Можно показать [2], что

$$\log j_0(\zeta, z, \zeta') = \log p(\zeta, z, \zeta') + e^{2i\theta} \log q(\zeta, z, \zeta').$$

Если (B) есть $|\zeta| > 1$ и $z = \infty$, то

$$j_0(\zeta, \infty, \zeta') = (\zeta - \zeta')\left(1 - \frac{1}{\zeta\overline{\zeta'}}\right); \quad j_{\pi/2}(\zeta, \infty, \zeta') = \frac{\zeta - \zeta'}{1 - \dfrac{1}{\zeta\overline{\zeta'}}};$$

$$p(\zeta, \infty, \zeta') = \zeta - \zeta'; \qquad q(\zeta, \infty, \zeta') = \left(1 - \frac{1}{\zeta\overline{\zeta'}}\right).$$

Теорема. *Для любой $F(\zeta)$ класса (Σ)*

$$R\left(e^{-2i\theta} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \log \frac{F(\zeta_i) - F(\zeta_j)}{p(\zeta_i, z, \zeta_j)}\right) \geqslant R\left(\sum_{i,\, j=1}^{n} \beta_{ij} \log q(\zeta_i, z, \zeta_j)\right). \tag{4}$$

Доказательство. Предположим сначала, что (C) состоит из аналитических кривых без кратных точек и что $m = 1$. Тогда

$$K(x) = \left(\sum_{s=1}^{n} \alpha_s x_s\right)^2; \quad H(x) = \sum_{s,\, s'=1}^{n} \alpha_s \overline{\alpha_{s'}} x_s x_{s'}.$$

Положим

$$f(\zeta) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \log(F(\zeta) - F(\zeta_s)); \quad L(\zeta) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \log j_s,$$

$$j_s = j_{\theta_s}(\zeta, z, \zeta_s); \quad \theta_s = \theta - \varphi_s; \quad \varphi_s = \arg \alpha_s; \quad \Phi(\zeta) = f(\zeta) - L(\zeta). \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = R\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} f(\zeta)\, d\overline{f(\zeta)}\right), \tag{6}$$

взятый по (C) в положительном направлении. Полагая $w = F(\zeta)$ $(w = u + iv)$, получаем

$$I = R\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \psi(w)\, d\overline{\psi(w)}\right); \quad \psi(w) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \log(w - F(\zeta_s)),$$

где (Γ) — образ (C) при преобразовании $w = F(\zeta)$.

Применяя формулу Грина для (D), дополнительной к образу (B), при преобразовании $w = f(\zeta)$ и уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -i \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

получаем

$$I = \frac{1}{\pi} \iint_{(D)} \left|\frac{d\psi}{dw}\right|^2 du\, dv. \tag{7}$$

В силу (5)

$$I = R\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \Phi\, d\overline{\Phi}\right) + R\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \Phi\, d\overline{L} + L\, d\overline{\Phi}\right) + R\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} L\, d\overline{L}\right). \tag{8}$$

Как и выше, получаем, учитывая направление обхода,

$$R\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\Phi\, d\overline{\Phi}\right)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(B)}\left|\frac{d\Phi}{d\zeta}\right|^2 dx\,dy \qquad (\zeta=x+iy). \tag{9}$$

Так как $I(e^{-i\theta}\log j_s)=\mathrm{const}$ на (C), то после несложных преобразований получаем

$$R\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}L\,d\overline{L}\right)=0. \tag{10}$$

Далее, применяя теорию вычетов,

$$R\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)}\Phi\, d\overline{L}+L\,d\overline{\Phi}\right)=2R\left(e^{-2i\theta}\sum_{s,\,s'=1}^{n}\alpha_s\alpha_{s'}\log\frac{F(\zeta_s)-F(\zeta_{s'})}{j_{s'}(\zeta_s,\,z,\,\zeta_{s'})}\right). \tag{11}$$

Из (7), (8), (9), (10) и (11) получаем

$$R\left(e^{-2i\theta}\sum_{s,\,s'=1}^{n}\alpha_s\alpha_{s'}\log\frac{F(\zeta_s)-F(\zeta_{s'})}{j_{s'}(\zeta_s,\,z,\,\zeta_{s'})}\right)>0.$$

Предельным переходом получаем для любой конечносвязной области (B)

$$R\left(e^{-2i\theta}\sum_{s,\,s'=1}^{n}\alpha_s\alpha_{s'}\log\frac{F(\zeta_s)-F(\zeta_{s'})}{j_{s'}(\zeta_s,\,z,\,\zeta_{s'})}\right)\geqslant 0,$$

что равносильно (4) при $m=1$. При этом знак равенства, в силу (7) и (9), может быть поставлен только тогда, когда $F(\zeta)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\log\left(F(\zeta)-F(\zeta_s)\right)=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\log j_s \tag{12}$$

и отображает (B) на w с разрезами по кривым

$$I\left(e^{-i\theta}\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\log\left(w-F(\zeta_s)\right)\right)=\mathrm{const}\ (^3).$$

Для $m>1$ неравенство (4) получается сложением таковых для каждого из полных квадратов $K(x)$. Так как знак равенства может иметь место, если $F(\zeta)$ удовлетворяет функциональным уравнениям типа (12), то при $m>1$ оценка (4) не является, вообще говоря, точной. Укажем некоторые следствия доказанной теоремы.

Из (4) следует для $|\zeta|>1$ и $z=\infty$, что

$$R\left(e^{-2i\theta}\sum_{i,\,j=1}^{n}\gamma_{ij}\log\frac{F(\zeta_i)-F(\zeta_j)}{\zeta_i-\zeta_j}\right)\geqslant\sum_{i,\,j=1}^{n}\beta_{ij}\log\left(1-\frac{1}{\zeta_i\overline{\zeta}_j}\right). \tag{13}$$

Полагая $2\theta=\pi+\arg\left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\gamma_{ij}\log\dfrac{F(\zeta_i)-F(\zeta_j)}{\zeta_i-\zeta_j}\right)$, получим из (13)

$$\left|\sum_{i,\,j=1}^{n}\gamma_{ij}\log\frac{F(\zeta_i)-F(\zeta_j)}{\zeta_i-\zeta_j}\right|\leqslant\sum_{i,\,j=1}^{n}\beta_{ij}\log\frac{1}{1-\frac{1}{\zeta_i\overline{\zeta}_j}}. \tag{14}$$

Если $K(x)$ — неотрицательная квадратичная форма при вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами, то имеет место оценка ([4])

$$\prod_{i,j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\zeta_i\bar{\zeta}_j}\right)^{\gamma_{ij}} \leqslant \prod_{i,j=1}^{n}\left|\frac{F(\zeta_i)-F(\zeta_j)}{\zeta_i-\zeta_j}\right|^{\gamma_{ij}} \leqslant \prod_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\zeta_i\bar{\zeta}_j}\right)^{\gamma_{ij}}}. \tag{15}$$

При $K(x)=x_1x_2$, $H(x)=\frac{1}{2}(|x_1|^2+|x_2|^2)$. Поэтому

$$\left|\log\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right| \leqslant -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right). \tag{16}$$

Оценка (16) точна при $\zeta_1=\bar{\zeta}_2$, так как для $F(\zeta)=\zeta+1/\zeta$ класса (Σ) в $|\zeta|>1$ имеет место знак равенства.

Ленинградский государственный
педагогический институт

Поступило
30 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Köbe, Acta mathem., 41 (1918). [2] Г. М. Голузин, Усп. матем. наук, в. 6 (1939). [3] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 21 (63), 1 (1947). [4] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 23, (65), 3 (1948).