Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

О СРАВНИМОСТИ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ АБЕЛЯ И *(C, α, β)*

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 8 VII 1953)

Известно [1, 2], что методы Чезаро и Абеля, как и многие другие методы суммирования двойных рядов, не сравнимы, т. е. имеются ряды, суммируемые методом Абеля, не суммируемые методом Чезаро, и наоборот. Ввиду этого представляет интерес установление дополнительных условий, при которых эти методы сравнимы.

К этим теоремам относится предложение [3], что из суммируемости двойных рядов с ограниченными частными суммами методом Абеля вытекает суммируемость этих рядов методом арифметических средних, т. е. что в этом случае метод Чезаро включает метод Абеля.

В настоящей заметке доказывается, что, если рассматривать ограниченное чезарово суммирование, то метод арифметических средних (C, α, β), где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, включает метод Абеля также в одном случае неограниченных чезаровых сумм.

Доказывается также, что теорема [4] о суммируемости методом $(C, \alpha+\lambda)$ для любого $\lambda > 0$ рядов, суммируемых методом Абеля и ограниченных (C, α) для некоторого $\alpha > -1$, переносится для случая $\lambda > 1$ на двойные ряды, ограниченно суммируемые методом Абеля и ограниченные (C, α, β). Обозначения и термины, которыми мы пользуемся, аналогичны соответствующим обозначениям и терминам в теории простых рядов [5].

Числовой ряд $\sum\limits_{(\mu,\ \nu)=0}^{\infty} U_{\mu\nu}$ суммируем методом (C, α, β), где $\alpha > -1$, $\beta > -1$, к числу S, если

$$\lim_{(m,\ n)\to\infty} \sigma_{m,\ n}^{\alpha,\ \beta} = S,$$

где

$$\sigma_{m,\ n}^{\alpha,\ \beta} = \frac{S_{m,\ n}^{\alpha,\ \beta}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}}, \tag{1}$$

причем $S_{m,n}^{\alpha,\beta}$, A_m^{α} и A_n^{β} определяются из соотношений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{\alpha} x^m = (1-x)^{-\alpha-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\beta} y^n = (1-y)^{-\beta-1}, \tag{2}$$

$$(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S_{m,\ n}^{\alpha,\ \beta} x^m y^n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{m,\ n} x^m y^n. \tag{3}$$

Двойной ряд ограниченно суммируем (C, α, β) к числу S, если $\lim\limits_{(m, n)\to\infty} \sigma_{m, n}^{\alpha, \beta} = S$ при условии, что m и n, стремясь к ∞, удовлетворяют неравенству (при любом λ, удовлетворяющем $0 < \lambda < 1$)

$$\lambda n < m < \lambda^{-1} n. \tag{4}$$

Ограниченную суммируемость (C, α, β) двойного ряда к числу S записываем

$$\lim_{(m, n)_0\to\infty} \sigma_{m, n}^{\alpha, \beta} = S.$$

Двойной ряд ограничен (C, α, β), если $|\sigma_{m, n}^{\alpha, \beta}| < M$ для $(m, n) = 0, 1, 2, \ldots$

Двойной ряд ограниченно суммируем методом Абеля к числу S, если $\sum\limits_{(m, n)=0}^{\infty} U_{m, n} x^m y^n$ сходится для $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{m, n} x^m y^n \to S,$$

если x и y, стремясь к 1, удовлетворяют неравенству

$$\lambda (1 - y) < 1 - x < \lambda^{-1} (1 - y) \tag{5}$$

при любом λ, удовлетворяющем $0 < \lambda < 1$.

Ограниченную суммируемость методом Абеля записываем

$$\lim_{(x, y)_0\to 1-0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{m, n} x^m y^n = S.$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > -1$,

$$g(u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{uv}, \text{ если } e^{-1} \leqslant u, \ v \leqslant 1, \\ 0 \quad \text{для всех других } u, \ v. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда можно построить два многочлена $p(u, v)$ *и* $P(u, v)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$p(u, v) \leqslant g(u, v) \leqslant P(u, v), \tag{7}$$

$$\int_0^1\int_0^1 [P(u, v) - p(u, v)] \left(\log\frac{1}{u}\right)^{\alpha} \left(\log\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Лемма эта доказывается так же, как предложение ([3]), что существуют $p(u, v)$ и $P(u, v)$, удовлетворяющие (7) и соотношению

$$\int_0^1\int_0^1 [P(u, v) - p(u, v)]\, du\, dv \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta > 1$ *и*

$$\lim_{(x, y)_0\to 1} (1 - x)^{\alpha+1} (1 - y)^{\beta+1} \sum_{\mu=N+1}^{\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \sigma_{\mu, \nu}^{\alpha, \beta} A_{\nu}^{\alpha} x^{\mu} y^{\nu} = S; \tag{9}$$

тогда

$$\lim_{(m, n)_0\to\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=N+1}^{m} \sum\limits_{\nu=N+1}^{n} S_{\mu\nu}^{\alpha, \beta}}{A_m^{\alpha+1} A_n^{\beta+1}} = S, \tag{10}$$

если

$$|\sigma_{\mu, \nu}^{\alpha, \beta}| < M, \quad (\mu, \nu) > N \geqslant 0.$$

При помощи лемм 1 и 2 можно доказать следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть для ряда* $\sum_{(\mu,\nu)=0}^{\infty} U_{\mu\nu}$ *выполняются условия:*

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(n^{\alpha+1}) \text{ при любом фиксированном } m, \tag{11}$$

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(m^{\alpha+1}) \text{ при любом фиксированном } n, \tag{12}$$

$$|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}| < M \text{ для } (m,n) > N \geqslant 0, \tag{13}$$

где $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Пусть, далее, $\sum_{(\mu,\nu)=0}^{\infty} U_{\mu\nu}$ *ограниченно суммируем методом Абеля к числу* S. *Тогда ряд ограниченно суммируем* $(C, \alpha+1, \beta+1)$ *к этому же числу.*

Следствие. Пусть частные суммы двойного ряда S_{mn} удовлетворяют условиям:

$$|S_{mn}| < M \text{ для } (m,n) > N \geqslant 0,$$

$$S_{mn} = O(n) \quad \text{при любом фиксированном } m,$$

$$S_{mn} = O(m) \quad \text{при любом фиксированном } n.$$

Пусть, далее, последовательность S_{mn} ограниченно суммируема методом Абеля к числу S. Тогда S_{mn} также ограниченно суммируем методом арифметических средних к этому же числу, т. е.

$$\lim_{(m,n)_0 \to \infty} \sigma_{m,n} = S.$$

Последнее предложение является обобщением теоремы Кноппа о суммируемости методом Чезаро ограниченных двойных последовательностей, суммируемых методом Абеля ([3]).

Справедливо более общее предложение, доказываемое таким же образом, как теорема 1.

Теорема 2. *Пусть для ряда* $\sum_{(\mu,\nu)=0}^{\infty} U_{\mu\nu}$ *при некоторых* $\gamma > 0$ *и* $\delta > 0$, *удовлетворяющих неравенству* $\gamma\delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$, *где* $\alpha > -1$, *и* $\beta > -1$, *выполняются условия:*

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(n^{\delta}) \text{ при любом фиксированном } m,$$

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = O(m^{\gamma}) \text{ при любом фиксированном } n,$$

$$|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}| < M \text{ для } (m,n) > N \geqslant 0.$$

Пусть, далее, $\sum_{(\mu,\nu)=0}^{\infty} U_{\mu\nu}$ *ограниченно суммируем методом Абеля к числу* S. *Тогда ряд ограниченно суммируем* $(C, \alpha+1, \beta+1)$ *к этому же числу, если* m *и* n, *стремясь к* ∞, *удовлетворяют неравенству*

$$\lambda n^{\delta/\alpha+1} < m < \lambda^{-1} n^{\frac{\beta+1}{\gamma}},$$

а x *и* y, *стремясь к* 1, *удовлетворяют неравенству*

$$\lambda(1-y)^{\frac{\beta+1}{\gamma}} < 1-x < \lambda^{-1}(1-y)^{\delta/\alpha+1}$$

при любом λ, *где* $0 < \lambda < 1$.

Из леммы 2 вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть двойной ряд ограниченно суммируем методом Абеля и* $|\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}| < M$ *для* $(m, n) = 0, 1, 2, \ldots,$ *где* $\alpha > -1$, $\beta > -1$; *тогда ряд этот ограниченно суммируем методом* $(C, \alpha + h, \beta + k)$ *для любых* $h > 1$ *и* $k > 1$.

В самом деле, из ограниченности ряда (C, α, β) следует, что он ограничен $(C, \alpha + \lambda_1, \beta + \lambda_2)$, где λ_1 и λ_2 — положительные числа; тогда, полагая в лемме 2 $N = 0$, находим, что ряд суммируем также $(C, \alpha + \lambda_1 + 1, \beta + \lambda_2 + 1)$.

Днепропетровский институт
инженеров транспорта
им. Л. М. Кагановича

Поступило
11 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Челидзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, № 6 (1947). [2] М. Ф. Тиман, ДАН, 76, № 5 (1951). [3] K. Knopp, Math. Z., 13, 45 (1939). [4] A. Andersen, Studier over Cesarós Summabilitätsmethode, Copenhagen, 1921. [5] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 48—50. [6] F. Lösch, Math. Ann., 110 (1934).