

Г. И. НАТАНСОН

**О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ СПОСОБОМ,  
АНАЛОГИЧНЫМ СПОСОБУ БЕРНШТЕЙНА — РОГОЗИНСКОГО**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 VII 1953)

В теории тригонометрических рядов Фурье хорошо известен метод суммирования Бернштейна — Рогозинского, состоящий в том, что вместо  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ , где  $S_n(x)$  — частные суммы ряда Фурье, рассматривается предел выражения

$$\frac{1}{2} \left[ S_n \left( x - \frac{\pi}{2n+1} \right) + S_n \left( x + \frac{\pi}{2n+1} \right) \right].$$

С. Н. Бернштейном <sup>(1)</sup> и В. Рогозинским <sup>(2)</sup> было установлено, что этот метод суммирует ряд Фурье любой непрерывной функции к этой функции. В дальнейшем этот метод изучался и другими авторами. Так например, И. П. Натансон <sup>(3)</sup> показал, что метод Бернштейна — Рогозинского суммирует ряд Фурье функции  $f(x) \in L$  в каждой ее точке Лебега, а Ф. И. Харшиладзе <sup>(4)</sup> обнаружил, что метод Бернштейна — Рогозинского есть метод множителей с матрицей

$$\left\{ \cos \frac{k\pi}{2n+1} \right\} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots, n \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}.$$

В настоящей заметке мы формулируем аналогичные результаты для рядов Фурье по многочленам Якоби.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in L_p^{(\alpha, \beta)}([-1, +1])$ , где \*  $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$  — вес Якоби. Пусть далее  $S_n(x) = S_n[f; x]$  —  $n$ -я частная сумма ряда Фурье по многочленам Якоби  $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  функции  $f(x)$ . Положим

$$x_1 = x \cos \alpha_n - \sqrt{1-x^2} \sin \alpha_n, \quad x_2 = x \cos \alpha_n + \sqrt{1-x^2} \sin \alpha_n,$$

где  $\alpha_n = \frac{\pi}{2n + \alpha + \beta + 1}$ , и составим многочлен

$$B_n(x) = B_n[f; x] = \frac{S_n(x_1) + S_n(x_2)}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n[f; x] = f(x)$$

во всех точках Лебега функции  $f(x)$ , принадлежащих открытому промежутку  $(-1, +1)$ .

\* Как обычно,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . Под  $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  подразумеваются нормированные многочлены Якоби.

Теорема 2. Если  $f(x)$  непрерывна на  $[-1, +1]$ , то на любом отрезке  $[-1+h, 1-h]$ , где  $0 < h < 1$ , многочлен  $B_n[f; x]$  равномерно стремится к  $f(x)$ .

Более того, если через  $\omega(\delta)$  обозначить модуль непрерывности  $f(x)$  на  $[-1, +1]$ , то для каждого  $x \in [-1+h, 1-h]$  имеет место оценка

$$|f(x) - B_n[f; x]| \leq M\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где  $M$  — некоторая величина, зависящая только от  $h$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Теорема 3. Если  $f(x) \in L_p^{(\alpha, \beta)}([-1, +1])$ , то суммирование ее ряда Фурье — Якоби в точке  $x \in (-1, +1)$  способом, введенным в теореме 1, равносильно применению к тому же ряду метода множителей с матрицей

$$\left\{ \cos \frac{2k + \alpha + \beta + 1}{2} \frac{\pi}{2n + \alpha + \beta + 1} \right\} \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots, n \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}.$$

Более того, если коэффициенты Фурье — Якоби функции  $f(x)$  суть  $a_n$  и

$$B_n^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k J_k^{(\alpha, \beta)}(x) \cos \frac{2k + \alpha + \beta + 1}{2} \alpha_n,$$

то для любого  $x$  из  $(-1, +1)$  будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [B_n(x) - B_n^*(x)] = 0.$$

Теорема 4. Метод множителей с матрицей

$$\left\{ \cos \frac{2k + \alpha + \beta + 1}{2} \frac{\pi}{2n + \alpha + \beta + 1} \right\} \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots, n \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix} \quad (*)$$

не слабее метода (C, 1).

Замечание. Нельзя доказать, что метод множителей (\*) сильнее, чем метод (C, 1), ибо при некоторых частных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  метод множителей (\*) равносильно методу (C, 1). Например, это будет так при  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  (см. (5)).

В заключение отметим следующие факты:

а) Если в определении способа суммирования, данном в теореме 1, заменить  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) на  $\bar{x}_i = x_i + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ , то заключения теорем 1 и 2 останутся в силе.

б) Если же заменить  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) на  $\tilde{x}_i = x_i + O\left(\frac{1}{n^{1/2+\epsilon}}\right)$ , то останется в силе, кроме того, и заключение теоремы 3.

Ленинградский государственный  
педагогический институт  
им. А. И. Герцена

Поступило  
30 VI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 1, 1952, стр. 523—525. <sup>2</sup> W. Rogosinski, Math. Ann., 95, 110 (1925). <sup>3</sup> И. П. Натансон, Тр. Ленингр. индустр. ин-та, разд. физ.-матем., 4, 2, 39 (1937). <sup>4</sup> Ф. И. Харшиладзе, ДАН, 30, 692 (1941). <sup>5</sup> С. Б. Стечкин, Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского (добавление к книге Харди, Расходящиеся ряды, 1951, стр. 479—492).