Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 VII 1953)

1. Рассматриваемые числа предполагаются комплексными, а функции комплекснозначными; в тех случаях, когда число предполагается вещественным, а функция принимающей вещественные значения, это будет оговариваться. Натуральное число n во всей работе зафиксировано. Слово «вектор» означает n-мерный вектор, слово «матрица» — квадратную матрицу порядка n.

2. Введем следующие обозначения. Если $A = \| a_{ik} \|$ — матрица, то $\{A\}_{ik} \equiv a_{ik}$; $|A|$ — матрица, определенная формулами $\{|A|\}_{ik} = |a_{ik}|$; A^* — матрица, определенная формулами $\{A^*\}_{ik} = \bar{a}_{ki}$;

$$\| A \|_{\mathrm{I}} \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} |; \quad \| A \|_{\mathrm{II}} \equiv \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ik} |;$$

$\| A \|_{\mathrm{III}} \equiv \sqrt{\lambda_1}$, где λ_1 — наибольшее собственное число матрицы A^*A (см. ([1])). Если A и B суть две вещественные матрицы, то запись $A \leq B$ означает, что $\{A\}_{ik} \leq \{B\}_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Если $\vec{\varphi}$ есть вектор с компонентами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то $\{\vec{\varphi}\}_i = \varphi_i$; $|\vec{\varphi}|$ — вектор с компонентами $|\varphi_1|, \ldots, |\varphi_n|$;

$$\| \vec{\varphi} \|_{\mathrm{I}} \equiv \max_{1 \leq i \leq n} | \varphi_i |; \quad \| \vec{\varphi} \|_{\mathrm{II}} \equiv \sum_{i=1}^{n} | \varphi_i |,$$

$$\| \vec{\varphi} \|_{\mathrm{III}} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{n} | \varphi_i |^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$ суть два вещественные вектора, то запись $\vec{\varphi} \leq \vec{\psi}$ означает, что $\{\vec{\varphi}\}_i \leq \{\vec{\psi}\}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Системы дифференциальных уравнений будем иногда записывать в векторно-матричной форме.

3. Пусть даны:

1) Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где функции f_i принимают вещественные значения и непрерывны вместе со своими первыми частными производными по y-м в некоторой области G вещественного евклидова пространства переменных $t, y_1, \ldots, y_n$.

2) Некоторое решение

$$y_1(t), \ldots, y_n(t), \quad t_0 \leqq t \leqq T,$$

системы (1).

3) Некоторая система функций

$$Y_1(t), \ldots, Y_n(t), \; t_0 \leqq t \leqq T,$$

принимающих вещественные значения и принадлежащих классу C'.

4) Область $G^* \subset G$, выпуклая по y-м, содержащая кривые

$$y_1 = y_1(t), \ldots, y_n = y_n(t), \quad t_0 \leqq t \leqq T,$$

$$y_1 = Y_1(t), \ldots, y_n = Y_n(t), \quad t_0 \leqq t \leqq T.$$

5) Матрица $U(t)$ класса C' на $[t_0, T]$, неособенная при каждом $t \in [t_0, T]$.

Положим при $i = 1, \ldots, n$, $t_0 \leqq t \leqq T$

$$\tau_i(t) \equiv \frac{dY_i(t)}{dt} - f_i[t, Y_1(t), \ldots, Y_n(t)],$$

$$\Delta_i(t) \equiv Y_i(t) - y_i(t).$$

Назовем $\vec{Y}(t)$ приближенным решением системы (1), $\vec{\tau}(t)$ — невязкой, $\vec{\Delta}(t)$ — ошибкой приближенного решения $\vec{Y}(t)$. Положим

$$f_{ik}(t, \vec{y}) = f_{ik}(t, y_1, \ldots, y_n) \equiv \frac{\partial f_i(t, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_k}$$

$$\text{при } (t, \vec{y}) \in G, \quad i, k = 1, \ldots, n,$$

и определим матрицы $J[t, \vec{y}]$ и $Q[t, \vec{y}]$ формулами

$$\{J[t, \vec{y}]\}_{ik} \equiv f_{ik}(t, \vec{y}), \; i, k = 1, \ldots, n,$$

$$Q[t, \vec{y}] \equiv U^{-1}(t) J[t, \vec{y}] U(t) - U^{-1}(t) \frac{dU(t)}{dt}.$$

Положим при $t_0 \leqq t \leqq T$

$$\vec{\zeta}(t) \equiv U^{-1}(t) \vec{\tau}(t), \quad \vec{\vartheta}(t) \equiv U^{-1}(t) \vec{\Delta}(t).$$

4. Теорема 1. *Пусть вещественная матрица* $A(t)$ *непрерывна при* $t_0 \leqq t \leqq T$ *и удовлетворяет следующим условиям*:

$$\operatorname{Re}\{Q[t, \vec{y}]\}_{kk} \leqq \{A(t)\}_{kk}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$|\{Q[t, \vec{y}]\}_{ik}| \leqq \{A(t)\}_{ik}, \quad i, k = 1, \ldots, n, \; i \neq k,$$

при $t_0 \leqq t \leqq T$, $(t, \vec{y}) \in G^*$. *Тогда, если* $\vec{\varepsilon}(t)$ *есть решение системы*

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = A(t)\vec{\varepsilon} + |\vec{\zeta}(t)|$$

такое, что $|\vec{\vartheta}(t_0)| \leqq \vec{\varepsilon}(t_0)$, *то*

$$|\vec{\vartheta}(t)| \leqq \vec{\varepsilon}(t) \text{ при } t_0 \leqq t \leqq T$$

и

$$|\vec{\Delta}(t)| \leqq |U(t)| \vec{\varepsilon}(t) \text{ при } t_0 \leqq t \leqq T.$$

Теорема 2. *Пусть вещественная функция $\gamma(t)$ непрерывна при $t_0 \leqq t \leqq T$ и*

$$\operatorname{Re}\{Q(t, \vec{y})\}_{kk} + \sum_{\nu \neq k} |\{Q[t, \vec{y}]\}_{k\nu}| \leqq \gamma(t)$$

при $t_0 \leqq t \leqq T$, $(t, \vec{y}) \in G^*$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\|\vec{\vartheta}(t)\|_{\mathrm{I}} \leqq \|\vec{\vartheta}(t_0)\|_{\mathrm{I}} \exp\left[\int_{t_0}^{t} \gamma(u)\, du\right] + \int_{t_0}^{t} \|\vec{\zeta}(\xi)\|_{\mathrm{I}} \exp\left[\int_{\xi}^{t} \gamma(u)\, du\right] d\xi$$

и

$$\|\vec{\Delta}(t)\|_{\mathrm{I}} \leqq \|U(t)\|_{\mathrm{I}} \|\vec{\vartheta}(t)\|_{\mathrm{I}}$$

при $t_0 \leqq t \leqq T$.

Теорема 3. *Пусть вещественная функция $\gamma'(t)$ непрерывна при $t_0 \leqq t \leqq T$ и*

$$\operatorname{Re}\{Q[t, \vec{y}]\}_{kk} + \sum_{\nu \neq k} |\{Q[t, \vec{y}]\}_{\nu k}| \leqq \gamma'(t)$$

при $t_0 \leqq t \leqq T$, $(t, \vec{y}) \in G^*$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\|\vec{\vartheta}(t)\|_{\mathrm{II}} \leqq \|\vec{\vartheta}(t_0)\|_{\mathrm{II}} \exp\left[\int_{t_0}^{t} \gamma'(u)\, du\right] + \int_{t_0}^{t} \|\vec{\zeta}(\xi)\|_{\mathrm{II}} \exp\left[\int_{\xi}^{t} \gamma'(u)\, du\right] d\xi$$

и

$$\|\vec{\Delta}(t)\|_{\mathrm{II}} \leqq \|U(t)\|_{\mathrm{II}} \|\vec{\vartheta}(t)\|_{\mathrm{II}}$$

при $t_0 \leqq t \leqq T$.

Теорема 4. *Пусть функция $\tilde{\gamma}(t)$ непрерывна при $t_0 \leqq t \leqq T$ и пусть при $t_0 \leqq t \leqq T$ для всякого вектора $\vec{\varphi}$ такого, что $\|\vec{\varphi}\|_{\mathrm{III}} = 1$ и $U(t)\vec{\varphi}$ есть вещественный вектор, и для всякого вектора $\vec{y}$ такого, что $(t, \vec{y}) \in G^*$, выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} \sum_{\nu, \mu = 1}^{n} \{Q[t, \vec{y}]\}_{\nu\mu} \varphi_\mu \bar{\varphi}_\nu \leqq \tilde{\gamma}(t).$$

Тогда

$$\|\vec{\vartheta}(t)\|_{\mathrm{III}} \leqq \|\vec{\vartheta}(t_0)\|_{\mathrm{III}} \exp\left[\int_{t_0}^{t} \tilde{\gamma}(u)\, du\right] + \int_{t_0}^{t} \|\vec{\zeta}(\xi)\|_{\mathrm{III}} \exp\left[\int_{\xi}^{t} \tilde{\gamma}(u)\, du\right] d\xi$$

и

$$\|\vec{\Delta}(t)\|_{\mathrm{III}} \leqq \|U(t)\|_{\mathrm{III}} \|\vec{\vartheta}(t)\|_{\mathrm{III}}$$

при $t_0 \leqq t \leqq T$.

5. В изложенных теоремах дается оценка погрешности, с которой каким-то образом полученное приближенное решение $\vec{Y}(t)$ системы (1) представляет неизвестное нам решение $\vec{y}(t)$. Матрицу $U(t)$ следует стараться выбрать так, чтобы недиагональные элементы матрицы $Q[t, \vec{y}]$ были малы. Часто бывает выгодно применять теоремы повторно: применив, скажем, теорему 2 один раз, мы получаем оценку, которая позволяет «сузить» область G^* и уменьшить $\gamma(t)$. После этого повторное применение теоремы дает оценку погрешности лучшую, чем первый раз.

6. В формулировке теорем 1—4 можно, не нарушая верности утверждения, заменить вектор $\vec{\zeta}(t)$ на любой другой, компоненты которого не меньше по модулю, чем компоненты вектора $\vec{\zeta}(t)$.

7. Если система дифференциальных уравнений (1) линейна, то матрицы $J[t, \vec{y}]$ и $Q[t, \vec{y}]$ не зависят от $\vec{y}$ и нахождение матрицы $A(t)$ и функций $\gamma(t)$, $\gamma'(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$, удовлетворяющих требуемым условиям, весьма упрощается.

8. Аналогичные теоремы можно дать для «априорной» оценки погрешности, с которой еще не вычисленное решение $\vec{Y}(t)$ одной («более простой») системы дифференциальных уравнений представляет интересующее нас решение $\vec{y}(t)$ другой («более сложной») системы дифференциальных уравнений. Однако, как правило, вычислив решение $\vec{Y}(t)$ «более простой» системы и применив изложенные теоремы, мы получим оценку лучшую, чем указанная «априорная» оценка.

9. В настоящей работе изучалась погрешность приближенного решения, заданного в аналитической форме. Аналогичные теоремы справедливы для оценки погрешности приближенного решения, полученного численным интегрированием, т. е. заданного только для ряда дискретных значений независимого переменного. Как и в аналитическом случае, изменение оценки погрешности с увеличением интервала $[t_0, t]$ зависит от структуры матрицы Якоби $J[t, \vec{y}]$ системы (1), и для некоторых классов систем (1) и некоторых методов численного интегрирования можно доказать, что погрешность остается ограниченной при беспредельном увеличении интервала численного интегрирования.

Поступило
30 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, 1950.