Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. И. ГРАЕВ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕГУЛЯРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ НА НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VII 1953)

1. В теории представлений групп важное место занимает задача о разложении регулярного представления группы на неприводимые представления, являющаяся аналогом разложения функции в интеграл Фурье (аналог формулы Планшереля). Мы будем заниматься здесь группами Ли, для которых эта задача по существу эквивалентна следующим двум задачам.

Первая задача. Предположим, что для произвольной фиксированной функции $x(g)$ на группе Ли G* нам известны интегралы $\int x(g)\chi_\alpha(g)\,dg$, где χ_α — характеры всевозможных неприводимых представлений, входящих в регулярное представление. Требуется найти интеграл функции $x(g)$, взятый по произвольному классу «общего положения» сопряженных элементов e группы G.

Эта первая задача обычно не представляет трудности. Так, для полупростой группы Ли она сводится по существу к выражению функции, заданной на коммутативной подгруппе (подгруппе D диагональных матриц в случае комплексной унимодулярной группы и на аналогичных подгруппах в случае других полупростых групп) через ее коэффициенты Фурье ([2]).

Вторая задача. Предположим, что для произвольной фиксированной функции $x(g)$ на группе Ли G известен ее интеграл по классу сопряженных элементов «общего положения». Требуется выразить через этот интеграл значение функции $x(g)$ в единице e группы G.

Ввиду того что основную трудность представляет для групп Ли вторая задача, мы займемся именно ею. В случае конечной группы аналогичная задача тривиальна, поскольку единица группы есть в этом случае один из классов сопряженных элементов, ничем не отличающийся от других. В случае группы Ли единица группы является «особым» классом сопряженных элементов, поскольку класс сопряженных элементов «общего положения» есть обычно многообразие. Однако в случае компактной группы, зная интеграл функции по классу сопряженных элементов общего положения, легко найти значение функции в единице группы, поскольку единица группы есть предел классов сопряженных элементов. Значение функции в единице есть

* В дальнейшем функция $x(g)$ будет предполагаться всегда непрерывной, дифференцируемой достаточное число раз и обращающейся в нуль вне малой окрестности единичного элемента.

в этом случае просто предел отношения интеграла функции по классу сопряженных элементов к мере этого класса*.

Однако задача значительно усложняется, когда мы переходим к группам некомпактным. Действительно, для этих групп единица уже не является пределом классов сопряженных элементов. Так, для группы матриц при стремлении собственных значений к 1 соответствующий класс сопряженных элементов сходится не к единичной матрице, а к классу сопряженных матриц, жорданова нормальная форма которых состоит из одного квадрата. Единичная матрица представляет собой особую точку этого класса**.

До сих пор решение второй задачи вызывало в случае некомпактных групп большие трудности. Между тем, во всех рассмотренных случаях окончательные формулы для некомпактных и компактных групп весьма схожи между собой. Такая связь отнюдь не случайна. Мы укажем в этой заметке метод решения поставленной задачи, общий как для групп компактных, так и для групп некомпактных. Применение этого метода по существу не вызывает никаких особых трудностей.

2. Предлагаемый метод использует некоторые результаты, принадлежащие М. Риссу ([3]). Так как они нужны в несколько более общем виде, мы приведем их здесь.

Рассмотрим интеграл вида

$$R(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\left|\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j\right|^{\lambda/2} dx_1\ldots dx_n, \tag{1}$$

где $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$ — невырожденная квадратичная форма от вещественных переменных $x_1,\ldots,x_n$***, λ — произвольное комплексное число. Будем предполагать, что $f(x_1,\ldots,x_n)$ — непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторого ограниченного множества. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda>0$ интеграл (1) сходится. Если $\operatorname{Re}\lambda<0$, то под интегралом (1) будем понимать аналитическое продолжение функции $R(\lambda)$, определенной для $\operatorname{Re}\lambda>0$. Будем предполагать, что n — нечетное число. В этом случае $R(\lambda)$ — аналитическая функция, единственными особенностями которой являются простые полюса при $\lambda=-n,\ -(n+2),\ldots,-(n+2k),\ldots$****. Элементарный подсчет показывает, что вычеты функции $R(\lambda)$ задаются формулами

$$\underset{\lambda=-n}{\text{Выч.}}\,R(\lambda)=c_0f(0,\ldots,0), \tag{2}$$

$$\underset{\lambda=-(n+2k)}{\text{Выч.}}\,R(\lambda)=c_k\Delta^kf|_{x_1=\ldots=x_n=0}. \tag{3}$$

Здесь через Δ обозначен дифференциальный оператор вида $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$, где $\|\beta_{ij}\|$ — матрица, обратная матрице $\|\alpha_{ij}\|$ квадратич-

* Простым аналогом задачи для компактных групп является следующая: найти $f(0,0)$, если известны интегралы функции $f(x,y)$ по окружностям $x^2+y^2=c^2$.

** Простым аналогом задачи для некомпактных групп является следующая: найти $f(0,0)$ если известны интегралы функции $f(x,y)$ по гиперболам $x^2-y^2=c^2$.

*** М. Риссом разобран в ([3]) случай, когда квадратичная форма положительно определенная, либо имеет один минус. Общий случай можно рассмотреть по существу аналогичным образом.

**** При четном n функция $R(\lambda)$ может также иметь полюса второго порядка. Этого более сложного случая мы будем стараться по возможности избегать.

ной формы в интеграле (1); $c_0, c_1, \ldots$ числовые множители, не зависящие от функции f.

3. Идею предлагаемого метода мы проиллюстрируем на случае комплексной полупростой группы. Случай вещественных полупростых групп будет разобран в другой заметке. Так как рассуждения одинаковы для всех полупростых комплексных групп Ли, мы проведем их на простейшем случае унимодулярной группы. В конце укажем, как это распространить на любую комплексную полупростую группу.

Вместо группы унимодулярных матриц нам будет удобнее рассмотреть группу G всех комплексных невырожденных матриц, определитель которых — вещественное число, поскольку многообразие элементов группы G имеет нечетное число $(2n^2-1)$ измерений.

Наша задача состоит таким образом в том, чтобы, зная интеграл I_δ функции $x(g)$ по классу сопряженных элементов, найти $x(e)$. В случае группы матриц класс сопряженных элементов «общего положения» есть совокупность матриц, эквивалентных данной диагональной матрице δ с различными собственными значениями. Определим точно, что мы понимаем под интегралом по классу сопряженных элементов. Пусть g — матрица из G и δ — ее диагональная форма. Зададим матрицу g при помощи системы параметров, в число которых входят параметры матрицы δ. Остальные параметры матрицы g обозначим через $\bar{g}$. Пусть $x(g)$ — функция на группе G. Тогда $x(g) = x(\bar{g}, \delta)$ и

$$\int x(g)\,dg = \int x(\bar{g}, \delta)\,\omega(\bar{g}, \delta)\,d\bar{g}\,d\delta, \tag{4}$$

где $\omega(\bar{g}, \delta)$ — якобиан перехода к параметрам $\bar{g}$, δ. Введем в рассмотрение

$$I_\delta = \frac{1}{|D(\delta)|}\int x(\bar{g}, \delta)\,\omega(\bar{g}, \delta)\,d\bar{g}, \tag{5}$$

где $D(\delta)$ — дискриминант характеристического многочлена матрицы δ. I_δ представляет собой интеграл по классу сопряженных элементов. Функция I_δ является симметрической, достаточное число раз дифференцируемой функцией от собственных значений матрицы δ. Формула (4) перепишется тогда в виде

$$\int x(g)\,dg = \int I_\delta\,|D(\delta)|\,d\delta. \tag{6}$$

Пусть $\varphi(g) = \varphi(\delta_g)$ — какая-либо функция собственных значений матрицы g. Тогда, в соответствии с (6), имеем

$$\int x(g)\,|\varphi(g)|^{\lambda/2}\,dg = \int I_\delta\,|D(\delta)|\,|\varphi(\delta)|^{\lambda/2}\,d\delta = R(\lambda). \tag{7}$$

Будем предполагать, что в окрестности единичной матрицы e функция $\varphi(g)$ с точностью до малых более высокого порядка является невырожденной квадратичной формой от $2n^2-1$ параметров матрицы g. Такую функцию можно подобрать различными способами. Например, если $\lambda_k = e^{\tau_k + i\varphi_k}$ — собственные значения матрицы g, мы можем положить $\varphi(g) = \sum_{k=1}^{n} (\tau_k^2 - \varphi_k^2)$ или $\varphi(g) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \tau_k$ и т. д. В таком случае каждый из интегралов в (7) будет представлять собой по существу интеграл типа (1).

Подсчитаем вычет каждого из этих интегралов при $\lambda = -(2n^2-1)$. Так как интеграл в левой части равенства берется по многообразию размерности $2n^2-1$, то, согласно (2), его вычет при $\lambda = -(2n^2-1)$ есть, с точностью до постоянного множителя, $x(e)$. Так как интеграл в правой части равенства (7) берется по многообразию $2n-1$ измерений, то его вычет, в силу (3), есть с точностью до постоянного множителя $\Delta^{n(n-1)}\{I_\delta \mid D(\delta)\mid\}_{\delta=e}$. Здесь Δ — однородный дифференциальный оператор второго порядка по переменным τ_i и φ_i, соответствующий квадратичной форме $\varphi(\delta)$. Полагая $\frac{\partial}{\partial\mu_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}-i\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}+i\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)$ и используя свойства функции $\mid D(\delta)\mid$, мы получим

$$\Delta^{n(n-1)}\{I_\delta \mid D(\delta)\mid\}_{\delta=e}=\tilde{c}\prod_{i<j}\left(\frac{\partial}{\partial\mu_i}-\frac{\partial}{\partial\mu_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}_i}-\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}_j}\right)I_\delta\Big|_{\delta=e}, \tag{8}$$

где каждую разность $\partial/\partial\varphi_i-\partial/\partial\varphi_n$ следует формально заменить на $\partial/\partial\varphi_i$. Таким образом, мы получаем

$$x(e)=c\prod_{i<j}\left(\frac{\partial}{\partial\mu_i}-\frac{\partial}{\partial\mu_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}_i}-\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}_j}\right)I_\delta\Big|_{\delta=e}, \tag{9}$$

где вместо $\partial/\partial\varphi_i-\partial/\partial\varphi_n$ следует писать $\partial/\partial\varphi_i$. Переход к случаю унимодулярной группы осуществляется теперь простой заменой в формуле (9) операторов $\partial/\partial\tau_i-\partial/\partial\tau_n$ на $\partial/\partial\tau_i$. Константа c вычисляется без труда. Для ее вычисления надо лишь воспользоваться константами в формулах (2) и (3) и множителем $\tilde{c}$ из формулы (8). Формула (9) была впервые получена в (1) и (2).

4. Проведенное выше доказательство без всяких изменений переносится на любую комплексную полупростую группу. При этом надо лишь под δ понимать элементы соответствующей коммутативной подгруппы, под $D(\delta)$ — произведение квадратов всех корней полупростой группы G, а под $\varphi(\delta)$ — например, вещественную или мнимую часть от второго картановского инварианта соответствующей группы.

Другой вывод аналога формулы Планшереля для комплексных полупростых групп Ли был предложен Харишчандра (4).

Поступило
30 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, ДАН, 63, № 6 (1948). [2] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. Стеклова, 36 (1950). [3] M. Riesz, Acta Mathem., 81, 1—2 (1949). [4] Harish-Chandra, Proc. Nat. Acad. Sci., 37, № 10 (1951).