

В. С. ВИДЕНСКИЙ

О ВЗВЕШЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 VI 1953)

Пусть $\{k_n\}$ ($k_0 = 0$) — бесконечная возрастающая последовательность целых чисел. Будем говорить, что функция $\Phi(x) > 0$ ($-\infty < x < \infty$) является весовой относительно последовательности $\{x^{k_n}\}$ ($\Phi(x) \in W\{k_n\}$), если для всякой непрерывной на $(-\infty, \infty)$ функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = 0, \quad (1)$$

и любого $\varepsilon > 0$ можно построить такой многочлен вида

$$P(x) = c_0 + c_1 x^{k_1} + \dots + c_n x^{k_n}, \quad (2)$$

что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (3)$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность целых чисел, дополняющая $\{k_n\}$ до натурального ряда. С. Мандельброт⁽¹⁾, введя обозначения

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \quad (\lambda > 0), \quad D(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\lambda}, \quad D^*(\lambda) = \sup_{x \geq \lambda} D(x),$$

$$D^* = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} D(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} D^*(\lambda), \quad \bar{D}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda D(x) dx,$$

$$\bar{D}^*(\lambda) = \sup_{x \geq \lambda} \bar{D}(x), \quad \bar{D}^* = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{D}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{D}^*(\lambda),$$

показал, что если $\Phi(x)$ ($\Phi(x) \in N$) четная нормально возрастающая функция (т. е. такая, что $x \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \uparrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$) и удовлетворяет условию

$$\Phi^{(k_1)}(x) = O\left(\Phi(x)^{1 + \frac{1}{k_1}}\right), \quad (4)$$

если $\bar{D}^* < \frac{1}{2}$ (соответственно, $D^* < \frac{1}{2}$), и если существует такая постоянная $\gamma > 0$, что расходятся один из двух интегралов

$$\int_0^\infty p(\sigma) e^{-\int_0^\sigma \frac{du}{1-2D^*[\gamma p(u)]}} d\sigma = \infty \quad \left(\bar{D}^* < \frac{1}{2}\right), \quad (5)$$

$$\int_0^\infty p(\sigma) e^{-\int_0^\sigma \frac{du}{1-2D^*[\gamma p(u)]}} d\sigma = \infty \quad \left(D^* < \frac{1}{2}\right), \quad (6)$$

где $p(\sigma) = \log \Phi(e^\sigma)$, то $\Phi(x) \in W\{k_n\}$.

Здесь будет показано с помощью метода, не связанного с рассуждениями, которые были использованы для доказательства этого предположения, что ограничение (4) может быть отброшено и, следовательно, справедлива более общая

Теорема 1. Если последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что $\overline{D} < 1/2$ (или $D < 1/2$) и если четная функция $\Phi(x) \in N$ удовлетворяет (5) (или (6)), то $\Phi(x) \in W\{k_n\}$.

Заметим, что из условий $F(x) \in W\{k_n\}$ и $F(x) \leq \Phi(x)$ ($-\infty < x < \infty$) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такой многочлен $P(x)$ вида (2), что

$$||x| - P(x)| < \varepsilon F(x) \leq \varepsilon \Phi(x),$$

откуда следует, благодаря известному рассуждению С. Н. Бернштейна ((²), стр. 145), что $\Phi(x) \in W\{k_n\}$. Мы построим для всякой четной функции $\Phi(x) \in N$, удовлетворяющей условию (5) (или (6)), такую четную функцию $F(x) \in N$, которая удовлетворяет условиям (4) и (5) (или (6)), причем $F(x) \leq \Phi(x)$ ($-\infty < x < \infty$).

Теорема 2. Если четная функция $\Phi(x) \in N$, то можно построить такую целую четную функцию*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \quad (a_0 > 0, a_{2n} \geq 0), \quad (7)$$

для которой при достаточно больших x ($|x| > x_0$) выполняются неравенства

$$\frac{x^2 - x_1^2}{x^2 x_1^2} F(x_1) < \Phi(x) < F(x) \quad (x_0 < x_1 < x). \quad (8)$$

Для всякой функции $\Phi(x) \in N$ можно построить, как доказал С. Мандельброт ((⁴), стр. 46), такую возрастающую последовательность положительных чисел $\{m_n\}$ ($\sqrt[m_n]{m_n} \rightarrow \infty$), что функция

$$T(x) = \max_{n \geq 0} \frac{x^n}{m_n} \quad (0 < x < \infty) \quad (9)$$

подчинена неравенствам

$$\log T(x) \leq \log \Phi(x) \leq \log T(x) + \log x \quad (x \geq 1). \quad (10)$$

Полагая

$$F(x) = \frac{1}{m_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{m_{2n}}, \quad (11)$$

принимая во внимание (9) и монотонность последовательности $\{m_n\}$, замечаем, что при $x > x_0 \geq 1$

$$xT(x) < F(x) \quad (12)$$

и при $x > x_1 > x_0$

$$F(x_1) = \frac{1}{m_0} + x_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1^{2n}}{m_{2n}} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{2n} \leq T(x) \left[1 + x_1^2 \frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)^2}{1 - \left(\frac{x_1}{x}\right)^2} \right] < T(x) \frac{x^2 x_1^2}{x^2 - x_1^2}. \quad (13)$$

* $F(x) \in N$, что вытекает из теоремы Адамара о трех окружностях, а также легко проверяется непосредственно (²).

В частности, при $x_1 = x/2$ имеем

$$\frac{3}{x^2} F\left(\frac{x}{2}\right) < \Phi(x) < F(x). \quad (8^{bis})$$

Следствие 1. *Интегралы*

$$\int_0^{\infty} p_1(\sigma) e^{-\int_0^{\sigma} \frac{du}{1-2D^{[\gamma p_1(u)]}}} d\sigma \quad \left(\bar{D} < \frac{1}{2}\right), \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} p_1(\sigma) e^{-\int_0^{\sigma} \frac{du}{1-2D^{[\gamma p_1(u)]}}} d\sigma \quad \left(D < \frac{1}{2}\right), \quad (15)$$

где $p_1(\sigma) = \log F(e^\sigma)$ сходятся и расходятся одновременно с интегралами (5) и (6), соответственно.

Если функция (11) окажется конечного порядка ρ , то теорема 1 доказана, так как $(1) \log F(x) = O(x^\rho)$, а при $x > 1$

$$\log F(x) = \int_0^x \frac{F'(t)}{F(t)} dt \geq \int_{x-1}^x \frac{F'(t)}{F(t)} dt \geq (x-1) \frac{F'(x-1)}{F(x-1)} \int_{x-1}^x \frac{dt}{t} \sim \frac{F'(x-1)}{F(x-1)} (x \rightarrow \infty), \quad (16)$$

откуда непосредственно вытекает (4).

Теорема 3. *Если целая функция $F(x)$ вида (7) бесконечного порядка, то можно построить такую целую функцию любого конечного порядка $\rho > \frac{2}{1-2D}$ (или, соответственно, $\rho > \frac{2}{1-2D}$)*

$$F^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^* x^{2n} \quad (a_0^* > 0, a_{2n} \geq 0), \quad (17)$$

что

$$a_{2n}^* \leq a_{2n} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{a_{2n}^*}{a_{2n}}} = 0, \quad (18)$$

причем* расходится интеграл

$$\int_0^{\infty} p^*(\sigma) e^{-\int_0^{\sigma} \frac{du}{1-2D^{[\gamma p^*(u)]}}} d\sigma \quad \left(\bar{D} < \frac{1}{2}\right) \quad (19)$$

или, соответственно,

$$\int_0^{\infty} p^*(\sigma) e^{-\int_0^{\sigma} \frac{du}{1-2D^{[\gamma p^*(u)]}}} d\sigma \quad \left(D < \frac{1}{2}\right), \quad (20)$$

где $p^*(\sigma) = \log F^*(e^\sigma)$.

Так как $F(x)$ бесконечного порядка, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_{2n}}}{2n \log 2n} = 0 \quad (21)$$

и, следовательно, для некоторой подпоследовательности $\{n_s\}$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{a_{2n_s}}}{2n_s \log 2n_s} = 0. \quad (22)$$

* Предел берется по тем n , для которых $a_{2n} > 0$.

Выбрав $\rho > \frac{2}{1-2\bar{D}}$, положим

$$a_{2n_s}^* = \frac{a_{2n_s}}{(2n_s)^{2n_s/\rho}}$$

Тогда функция

$$F^*(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2n_s}^* x^{2n_s}$$

будет порядка ρ . Интеграл (19) расходится, так как в противном случае мы имели бы, принимая во внимание, что $\bar{D}(u) \downarrow \bar{L}$, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и $\sigma_1 > \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \varepsilon > \int_{\sigma_1}^{2\sigma_1} p^*(\sigma) e^{-\int_{\alpha}^{\sigma} \frac{du}{1-2\bar{D}[\gamma p^*(u)]}} d\sigma > p^*(\sigma_1) \int_{\sigma_1}^{2\sigma_1} e^{-\frac{\sigma-\alpha}{1-2\bar{D}}} d\sigma > \\ > p^*(\sigma_1) e^{-\frac{2\alpha}{1-2\bar{D}}} \left(\frac{1}{2} - \bar{D}\right) e^{-\frac{2\sigma_1}{1-2\bar{D}}}, \end{aligned} \quad (23)$$

что противоречит предположению $\rho > \frac{2}{1-2\bar{D}}$.

Теорема 1, таким образом, доказана. Из нее непосредственно следует (при $D=0$), что если $\Phi(x) \in N$ и расходится интеграл

$$\int_1^{\infty} \log \Phi(e^\sigma) e^{-\sigma} d\sigma = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2} dx = \infty, \quad (24)$$

то $\Phi(x) \in W\{n\}$, где $\{n\}$ — весь натуральный ряд. Однако из теоремы 2 (доказательство которой принципиально проще, чем доказательство теоремы 1), комбинированной с теоремой С. Н. Бернштейна ((2), стр. 147; 164), утверждающей, что целая функция вида (7) $F(x) \in W\{n\}$ тогда и только тогда, когда $F(x)$ не ниже первого рода, т. е. тогда и только тогда, когда расходится интеграл (3)

$$\int \frac{\log F(x)}{x^2} dx = \infty, \quad (25)$$

вытекает более полный результат, установленный в 1951 г. С. Н. Бернштейном (3, 5) и независимо от него другим методом Л. Карлесоном (6).

Следствие 2. Если $\Phi(x) \in N$, то расходимость интеграла (24) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\Phi(x) \in W\{n\}$.

Отметим, что рассуждение, с помощью которого была доказана теорема 3, позволяет также доказать одно предложение Т. Карлемана ((7), стр. 110) в несколько уточненной форме.

Следствие 3. Пусть $F(x)$ — целая функция вида (7) порядка ρ ($1 \leq \rho \leq \infty$), для которой расходится интеграл (25); тогда можно построить такую целую функцию вида (17) $F^*(x)$ произвольного конечного порядка ρ' ($1 \leq \rho' \leq \rho$), для которой расходится интеграл (25) и коэффициенты которой удовлетворяют условиям (18).

Поступило
16 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mandelbrojt, Ann. scient. de l'Ecole normale supér., 65, № 1 (1948).
² С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, Л.—М., 1937.
³ С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, № 4 (1951). ⁴ С. Мандельброейт, Квазианалитические классы функций, Л.—М., 1937. ⁵ С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, № 5 (1951). ⁶ L. Carleson, Proc. Am. Math. Soc., 2, № 6 (1951). ⁷ T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques, Paris, 1926.