Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

О СТРУКТУРЕ ОДНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 VII 1953)

1. При изучении нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна важную роль играют операторы, порождаемые функциями многих переменных. Пусть $f(u, x)$ — действительная функция, определенная для всех действительных u и всех $x \in B$, где B — измеримое множество евклидова пространства s измерений. Такая функция $f(u, x)$ порождает оператор h, заданный на некоторой совокупности вещественных функций $u(x)$ равенством $hu = f(u(x), x)$ $(x \in B)$. Данный оператор был рассмотрен в работах В. В. Немыцкого ([1]), автора ([2–5]) и М. А. Красносельского ([6, 7]).

В настоящей работе путем выяснения вопроса о том, как свойства оператора h зависят от структурных свойств функции $f(u, x)$, мы для широкого класса функциональных пространств завершаем исследование о непрерывности оператора h и показываем, что найденный нами в работах ([2, 3]) удобный для приложений достаточный признак непрерывности является и необходимым.

2. Пусть действительная функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ определена для $u_i \in (-\infty, +\infty)$ и $x \in B$. Для краткости формулировок введем определения.

Определение 1. Мы скажем, что $f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)-функция, если почти при каждом фиксированном $x \in B$ она непрерывна в каждой точке $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, а при фиксированных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ она измерима на множестве B по x.

Определение 2. Мы скажем, что функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ обладает усиленным (C)-свойством, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется замкнутое множество $F \subset B$, мера которого больше $(\operatorname{mes} B - \varepsilon)$, такое, что на топологическом произведении множества F и n-мерного евклидова пространства переменных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ непрерывна по совокупности всех аргументов.

При исследовании вопроса об измеримости некоторых функций мы пользуемся следующей леммой.

Лемма. *Для того чтобы функция $f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ была (H)-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она обладала усиленным (C)-свойством.*

Из данной леммы, в частности, вытекает, что если $f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)-функция, то $f(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), x)$ измерима на множестве B для измеримых на B функций $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ и что $a_\alpha(x) = \max\limits_{\Delta} f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$, где Δ есть n-мерный куб $|u_i| \leqslant \alpha$, есть измеримая на B функция.

3. Пусть L^p, где $p > 0$, есть класс функций, заданных на множестве B и суммируемых со степенью p. Пусть $f(u, x)$—(H)-функция.

Определение 3. Говорят, что оператор $hu = f(u(x), x)$ действует из L^p в L^{p_1} $(p > 0,\ p_1 > 0)$, если $hu \in L^{p_1}$ для всякой функции $u(x) \in L^p$.

Теорема. *Для того чтобы оператор $hu = f(u(x), x)$ действовал из L^p в L^{p_1} $(p > 0,\ p_1 > 0)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|f(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^r, \tag{1}$$

где $a(x) \in L^{p_1}$, $b > 0$, $r = p/p_1$.

В доказательстве нуждается лишь необходимость условия.

Сначала разберем случай, когда $r = 0$, т. е. когда оператор h действует из L^p в пространство ограниченных измеримых функций, а значит, $a(x) \leqslant C$ почти для всех $x \in B$. Положим

$$\alpha_n(x) = \max_{|u| \leqslant n} |f(u, x)|$$

и рассмотрим семейство функций $u = \varphi_n(x)$, удовлетворяющих данному неравенству, среди которых имеются измеримые. Согласно условию $\operatorname{vrai\,sup} \alpha_n(x) = b_n < \infty$, причем $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \ldots$ Допуская, что последовательность $\{b_n\}$ неограничена, положим

$$E_n = E(|f(u, x)| > b_n),$$

где E_n есть множество тех $x \in B$, для которых $|f(u, x)| > b_n$ хотя бы для некоторых u. Для множеств E_n имеем: $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ Положим $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Можно показать, что $\operatorname{mes} E_0 = 0$. Отсюда и из допущения следует, что если положим $\sigma_n = E_n \setminus E_{n+1}$, то среди множеств σ_n найдется подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\}$ таких, что $\operatorname{mes} \sigma_{n_k} > 0$. На каждом множестве σ_{n_k} будет

$$b_{n_k} < |f(u, x)| \leqslant b_{n_{k+1}}.$$

Обозначим через V_{n_k} семейство измеримых функций $u = \varphi_{n_k}(x)$, удовлетворяющих на σ_{n_k} последним неравенствам, и выберем из каждого семейства V_{n_k} такую функцию $\varphi_{n_k}(x)$, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_{n_k}} |\varphi_{n_k}(x)|^p \, dx < \infty,$$

где $e_{n_k} \subset \sigma_{n_k}$ выбраны для этой цели подходящим образом ($\operatorname{mes} e_{n_k} > 0$).

Полагая тогда

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_{n_k}(x), & x \in e_{n_k}, \\ 0, & x \in B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_{n_k}, \end{cases}$$

мы придем к противоречию, ибо $\psi(x) \in L^p$, но функция $f(\psi(x), x)$ неограничена на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_{n_k}$. Полученное противоречие доказывает, что $b_n \leqslant c = \mathrm{const}$. Значит, теорема доказана в предположении, что $r = 0$.

Пусть теперь $r > 0$. Рассмотрим расходящуюся возрастающую последовательность положительных чисел $\{b_n\}$, удовлетворяющую условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{-p_1} = +\infty$. Положим $\alpha_n(x) = \max\limits_{|u| \leqslant n} |f(u, x)|$, $a_1(x) = \alpha_1(x)$,

$$E_1 = E(|f(u, x)| > a_1(x) + b_1|u|^r),$$

$$a_2(x) = \begin{cases} a_1(x), & x \in B \setminus E_1, \\ \alpha_2(x), & x \in E_1, \end{cases} \qquad E_2 = E(|f(u, x)| > a_2 + b_2|u|^r)$$

и продолжим данный процесс, полагая

$$a_n(x)=\begin{cases}a_{n-1}(x), & x\in B\setminus E_{n-1},\\ \alpha_n(x), & x\in E_{n-1},\end{cases}\qquad E_n=E\left(|f(u,x)|>a_n(x)+b_n|u|^r\right).$$

Согласно условию $\alpha_n(x)\in L^{p_1}$, а значит, $a_n(x)\in L^{p_1}$. По построению $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$ Положим $E_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ и покажем, что $\operatorname{mes}E_0=0$.

Действительно, если допустить, что $\operatorname{mes}E_0=\gamma>0$, то можно подобрать последовательность $e_n\subset E_0$ ($e_i\cap e_k=0$, $\operatorname{mes}e_n=0$) и такие измеримые функции $\varphi_n(x)$, удовлетворяющие на e_n условию

$$|f(\varphi_n(x),x)|>a_n(x)+b_n|\varphi_n(x)|^r,$$

что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{e_n}|\varphi_n(x)|^p\,dx<+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n^{p_1}\int\limits_{e_n}|\varphi_n(x)|^p\,dx=+\infty. \tag{2}$$

Полагая тогда

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & x\in e_n,\\ 0, & x\in B\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n,\end{cases} \tag{3}$$

мы получим $\psi(x)\in L^p$, $f(\psi(x),x)\,\overline{\in}\,L^{p_1}$. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{mes}E_0=0$.

Положим $\sigma_k=E_k\setminus E_{k+1}$. На σ_k выполняется неравенство

$$a_k(x)+b_k|u|^r<|f(u,x)|\leqslant a_{k+1}(x)+b_{k+1}|u|^r. \tag{4}$$

Обозначим через V_k семейство измеримых функций $u=\varphi_k(x)$, удовлетворяющих на E_k ($\operatorname{mes}E_k>0$) последним неравенствам, а через $\widetilde{V}_k$ такие семейства, которые содержат неограниченные $\varphi_k(x)$. Оказывается, что семейства $\widetilde{V}_k$ образуют конечное множество. Действительно, при допущении противного можно будет подобрать такие функции $\varphi_{k_n}(x)\in\widetilde{V}_{k_n}$ и такие подмножества $e_{k_n}\subset\sigma_{k_n}$, что будут выполнены соотношения (2), если в них положить $n=k_n$. Определив тогда функцию $\psi(x)$ при помощи равенства (3), в котором n будет заменено на k_n, мы, согласно неравенству (4), придем к противоречию с условием теоремы, ибо $\psi(x)\in L^p$, а $f(\psi(x),x)\,\overline{\in}\,L^{p_1}$. Раз семейства $\widetilde{V}_k$ образуют конечное множество, то, обозначив через n_0-1 наибольший из нумеров таких семейств, согласно (4), получим, что для $x\in B\setminus E_{n_0}$

$$|f(u,x)|\leqslant a_{n_0}(x)+b_{n_0}|u|^r, \tag{5}$$

где $E_{n_0}=\bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty}\sigma_k$. Так как при $k\geqslant n_0$ каждое семейство V_k не содержит неограниченных функций, то почти всюду на σ_k равенство

$$\psi_k(x)=\sup_{\varphi_k\subset V_k}|f(\varphi_k(x),x)|$$

осуществляется при $\varphi_k(x)=\omega_k(x)$, где $|\omega_k(x)|<\gamma_k$. Положим

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_k(x), & x\in\sigma_k,\ k\geqslant n_0,\\ 0, & x\in B\setminus E_{n_0},\end{cases}\qquad \beta(x)=\begin{cases}\psi_k(x), & x\in\sigma_k,\ k\geqslant n_0,\\ 0, & x\in B\setminus E_{n_0},\end{cases}$$

Функция $\beta(x)$ мажорирует $|f(\varphi_k(x), x)|$ на E_{n_0}. Покажем, что $\beta(x) \in L^{p_1}$. Действительно, если

$$\int_{E_{n_0}} (\beta(x))^{p_1} dx = \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{\sigma_k} (\psi_k(x))^{p_1} dx = +\infty, \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{\sigma_k} |\omega_k(x)|^p dx < +\infty,$$

то $\omega(x) \in L^p$, а $f(\omega(x), x) \overline{\in} L^{p_1}$, что противоречит условию. Если

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{\sigma_k} [\psi_k(x)]^{p_1} dx = +\infty, \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{\sigma_k} |\omega_k(x)|^p dx = +\infty,$$

то подмножества $e_k \subset \sigma_k$ можно подобрать так, чтобы

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \int_{e_k} |\omega_k(x)|^p dx < +\infty, \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k^{p_1} \int_{e_k} |\omega_k(x)|^p dx = +\infty.$$

Полагая тогда

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \omega_k(x), & x \in e_k,\ k \geqslant n_0, \\ 0, & x \in B \setminus \bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty} e_k, \end{cases}$$

мы придем к противоречию, ибо $\omega_0(x) \in L^p$, $f(\omega_0(x), x) \overline{\in} L^{p_1}$.

Раз мажоранта $\beta(x) \in L^{p_1}$, то, полагая

$$a(x) = \begin{cases} a_{n_0}(x), & x \in B \setminus E_{n_0}, \\ \beta(x), & x \in E_{n_0}, \end{cases}$$

мы отсюда и из неравенства (5) найдем, что

$$|f(u, x)| \leqslant a(x) + b_{n_0} |u|^r$$

для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ и почти для всех $x \in B$. Теорема доказана.

4. Из доказанной теоремы и теоремы 2 работы ([3]) вытекает

Следствие 1. Если оператор h действует из L^p в L^{p_1}, то он непрерывен (ср. ([7])).

Далее, из доказанной теоремы следует предложение

Следствие 2. Если оператор h действует из L^p в L^{p_1} ($p>0$, $p_1 \geqslant 1$), то $\|hu\| \leqslant c + b\|u\|^r$, где $r = p/p_1$, $c = \text{const}$, $b = \text{const}$, $\|hu\| = \left(\int_B |f(u(x), x)|^{p_1} dx\right)^{1/p_1}$, $\|u\| = \left(\int_B |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Отметим еще, что конструкция, которая была использована при доказательстве теоремы, применима к доказательству аналогичных предложений, когда оператор h действует из L_Φ в L_{Φ_1} (Φ — монотонно возрастающая функция, $\Phi(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty$, L_Φ — класс функций, для которых $\Phi(|u(x)|)$ суммируемы (см. ([8]), стр. 70) на B).

5. Доказанная теорема и следствия 1 и 2 сохраняются для оператора $hu = (h_1 u, h_2 u, \ldots, h_n u)$, где $h_i u = f_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$. При этом неравенство (1) заменяется неравенством

$$|f(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^r,$$

где $a_i(x) \in L^{p_1}$, $b > 0$.

Поступило
3 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, Матем. сборн., 41, 438 (1934). [2] М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, 3 (31), 130 (1949). [3] М. М. Вайнберг, ДАН, 73, № 2, 253 (1950). [4] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., 26 (68), 3, 365 (1950). [5] М. М. Вайнберг, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 18, 2, 225 (1951). [6] М. А. Красносельский, Укр матем. журн., 2, № 3, 70 (1951). [7] М. А. Красносельский, ДАН, 77, № 2, 185 (1951). [8] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939.