Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Ш. БЛОХ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЕГО СПЕЦИАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ-ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 15 VII 1953)

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное на всей оси:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0. \tag{1}$$

Функция $q(x)$ предполагается непрерывной на любом конечном интервале. Пусть $\varphi_1(x, \lambda)$ и $\varphi_2(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_1'(0, \lambda) = 0; \quad \varphi_2(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2'(0, \lambda) = 1. \tag{2}$$

Известно [1], что существует такая монотонная, симметрическая матрица-функция второго порядка $T(\lambda) = \{t_{ik}(\lambda)\}_{i,k=1}^2$, что для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = \sum_{j,k=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\lambda) F_k(\lambda)\, dt_{jk}(\lambda), \tag{3}$$

где вектор-функция $F(\lambda) = \{F_1(\lambda), F_2(\lambda)\}$ есть преобразование Фурье функции $f(x)$, т. е. $F_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_k(x, \lambda)\, dx \quad (k = 1, 2)$.

Будем называть $T(\lambda)$ спектральной матрицей уравнения (1). В дальнейшем равенство (3) будем записывать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) F(\lambda)\, dT(\lambda).$$

Эта заметка посвящена решению следующей задачи. Пусть задана спектральная матрица $T(\lambda)$. Требуется определить, существует ли уравнение вида (1), имеющее данную спектральную матрицу $T(\lambda)$. В работе используется методика, разработанная И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном для решения подобной задачи на интервале $(0, \infty)$.

2. Докажем, что для непрерывно дифференцируемой функции $q(x)$ существует такая непрерывная функция $K(x, t)$ $(|t| \leqslant |x|)$, что

$$\varphi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} K(x, t) C(t, \lambda)\, dt. \tag{4}$$

Формулу (4) можно получить из аналогичных формул работы [2]. В указанной работе даны следующие формулы преобразования:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x A(x, t) \cos\sqrt{\lambda}t\, dt, \\ \varphi_2(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x B(x, t) \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\, dt. \end{gathered} \tag{5}$$

Доопределим функции $A(x,-t)=A(x,t)$; $B(x,-t)=-B(x,t)$.
Найдем такое $K(x,t)$, чтобы

$$A(x,t)=\frac{K(x,t)+K(x,-t)}{2};\quad B(x,t)=\frac{K(x,t)-K(x,-t)}{2}.$$

Подставив в (5) выражения для $A(x,t)$ и $B(x,t)$, получим формулу (4). Легко доказать:

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}-q(x)K(x,t)=0,\ K(x,-x)=0,\ K(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)\,ds.$$

Аналогично доказывается существование функции $K_1(x,t)$ такой, что

$$C(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\int\limits_{-x}^{x}K_1(x,t)\varphi(t,\lambda)\,dt,$$

и

$$\frac{\partial^2 K_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K_1(x,t)}{\partial t^2}+q(t)K_1(x,t)=0,$$

$$K_1(x,-x)=0,\ K_1(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)\,ds.$$

Пусть уравнение (1) задано и $T(\lambda)$ — отвечающая ему спектральная матрица. Положим $\sigma(\lambda)=T(\lambda)-\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}E$ при $\lambda\geqslant 0$ и $\sigma(\lambda)=T(\lambda)$ для $\lambda<0$.

Весьма просто доказывается существование и непрерывность функций $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^x C(s,\lambda)\,ds\right\}\left\{\int\limits_0^y C(s,\lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda)$ и $\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\,\partial y^2}$.

Можно доказать, что $K_1(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\operatorname{sign}x\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=-K_1(x,y)+\int\limits_{-y}^{y}K_1(x,s)\frac{\partial^2 F(s,y)}{\partial s\,\partial y}\,ds,\tag{I}$$

а функция $K(x,t)$ — интегральному уравнению

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}+\operatorname{sign}x\cdot K(x,y)+\int\limits_{-y}^{y}K(x,s)\frac{\partial^2 F(s,y)}{\partial s\,\partial y}\,ds=0.\tag{II}$$

3. Пусть задана монотонная симметричная матрица-функция $T(\lambda)$ и требуется определить, существует ли уравнение (1) с заданным $T(\lambda)$, а также найти это уравнение. Предположим, что матрица $T(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) для всякого x и y существует интеграл

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^x C(s,\lambda)\,ds\right\}\left\{\int\limits_0^y C(s,\lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda);$$

б) функция $F(x,y)$ имеет непрерывную четвертую производную $\partial^4 F(x,y)/\partial x^2\,\partial y^2$.

Теорема 1. *Если матрица-функция $T(\lambda)$ в каком-то конечном интервале имеет бесчисленное множество точек роста, то уравнение* (II) *разрешимо при всяком x.*

При помощи функции $K(x, y)$, которую мы нашли из уравнения (II), можно построить вектор-функцию $\varphi(x, \lambda)$ по формуле

$$\varphi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + \int_{-x}^{x} K(x, t)\, C(t, \lambda)\, dt. \tag{6}$$

Решив относительно $C(x, \lambda)$ уравнение (6), получим формулу обратного преобразования:

$$C(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) - \int_{-x}^{x} K_1(x, t)\, \varphi(t, \lambda)\, dt. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $f(s) \in L_2(-\infty, \infty)$, тогда имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, F(\lambda)\, dT(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции $f(s)$, т. е.

$$F(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f(s)\, \varphi(s, \lambda)\, ds.$$

Доказательство достаточно провести для характеристических функций

$$\theta(a, x, s) = 1, \text{ если } s \in [a, x]; \quad \theta(a, x, s) = 0, \text{ если } s \overline{\in} [a, x].$$

Пусть

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{a}^{x} \varphi(s, \lambda)\, ds \right\} \left\{ \int_{b}^{y} \varphi(s, \lambda)\, ds \right\} dT(\lambda).$$

Если подставить в выражение для I значение $\varphi(s, \lambda)$ из формулы (6), то после элементарных преобразований получим, что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(a, x, s)\, \theta(b, y, s)\, ds + M(x, y),$$

где $M(x, y)$ — такая функция, что

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} + \operatorname{sign} x \cdot K(x, y) + \int_{-x}^{x} K(x, s) \frac{\partial^2 F(s, y)}{\partial s\, \partial y}\, ds +$$

$$+ \int_{-y}^{y} K(y, s) \left\{ \frac{\partial^2 F(s, x)}{\partial s\, \partial x} + \operatorname{sign} x \cdot K(x, s) + \int_{-x}^{x} K(x, t) \frac{\partial^2 F(t, s)}{\partial t\, \partial s}\, dt \right\} ds.$$

Так как $K(x, y)$ есть решение интегрального уравнения (II), то

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Заметив, что $M(a, y) = M(x, b) = 0$, заключаем, что $M(x, y) = 0$, откуда

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(a, x, s)\, \theta(b, y, s)\, ds.$$

Теорема 3. *Функции $\varphi_1(x, \lambda)$ и $\varphi_2(x, \lambda)$ являются собственными функциями дифференциального уравнения вида $y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0$ с непрерывной функцией $q(x)$.*

Умножим равенство (6) на $\cos \sqrt{\lambda}\, t$ и подставим в правую часть вместо $C(x, \lambda)$ его значение из формулы (7). Получим, что

$$\varphi(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} t = \frac{1}{2} \{\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)\} + \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t, s) \varphi(s, \lambda)\, ds, \quad (8)$$

где $W(x, t, s)$ есть непрерывная функция и $W(x, t, s) = 0$ при

$$|s| \geqslant |x+t|. \quad (9)$$

При достаточном малом t $W(x, t, s)$ симметрична относительно переменных x, s. В самом деле, проинтегрируем от a до y равенство (8) и умножим затем скалярно на $\int_b^z \varphi(s, \lambda)\, ds$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} t \left\{\int_a^y \varphi(x, \lambda)\, dx\right\} \left\{\int_b^z \varphi(s, \lambda)\, ds\right\} dT(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_a^y dx \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t, s) \varphi(s, \lambda)\, ds\right\} \left\{\int_b^z \varphi(s, \lambda)\, ds\right\} dT(\lambda). \quad (10)$$

В правой части остался один член потому, что для данного y и z можно всегда подобрать a, b и $|t| < \tau$, чтобы интервалы $(a \pm t, y \pm t)$ и (b, z) не пересекались. Левая часть равенства (10) равна $\int_b^z ds \int_a^y W(x, t, s)\, dx$. Заменив в левой части (10) интегрирование от b до z интегрированием от b до a и от a до z, мы получим, что левая часть (10) представима в виде суммы двух функций $M(y, t)$ и $N(y, t, z)$, причем $N(y, t, z)$ симметрична относительно y и z. Из (10) следует, что

$$\int_b^z ds \int_a^y W(x, t, s)\, dx = M(y, t) + N(y, t, z).$$

Взяв вторую производную по y и z, получим, что $W(y, t, z)$ симметрична относительно y и z. Из (9) и симметричности $W(x, t, s)$ следует, что $W(x, t, s) = 0$ при $|x| \geqslant |s+t|$; поэтому (10) можно уточнить:

$$\varphi(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} t = \frac{1}{2} \{\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)\} + \int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s) \varphi(s, \lambda)\, ds.$$

Вычтем из обеих частей равенства $\varphi(x, \lambda)$ и разделим результат на t^2:

$$\varphi(x, \lambda) \frac{\cos \sqrt{\lambda} t - 1}{t^2} = \frac{1}{2} \{\varphi(x+t, \lambda) - \varphi(x, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)\} + $$

$$+ \int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s) \varphi(s, \lambda)\, ds. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что при $t \to 0$ равенство (11) стремится к

$$-\frac{\lambda}{2} \varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2} \varphi''(x, \lambda) - \frac{1}{2} q(x) \varphi(x, \lambda),$$

где $-\frac{1}{2} q(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\, ds.$

Теорема 3 доказана. Аналогично проводятся исследования для систем дифференциальных уравнений второго порядка.

Молодечненский учительский институт
г. Молодечно, БССР

Поступило
2 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, М., 1950. [2] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. мат., 15, № 4 (1951).