

М. Ш. БИРМАН

К ТЕОРИИ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 VII 1953)

В настоящей заметке мы коснемся некоторых вопросов, связанных с построенной М. И. Вишиком ⁽¹⁾ теорией общих граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений. При этом мы ограничимся только случаем самосопряженного дифференциального оператора, что позволит привлечь к исследованию важные результаты М. Г. Крейна ⁽²⁾. Ниже будут использованы обозначения нашей заметки ⁽³⁾.

Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном пространстве с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим в Ω эллиптический самосопряженный оператор второго порядка

$$\mathcal{L}g = - \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) + cg.$$

Пусть $\sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x) \eta_i \bar{\eta}_k \geq \nu^2 \sum_{k=1}^n |\eta_k|^2$ для любой точки $x \in \Omega + \Gamma$ и $c(x) \geq 0$.

Предположим еще, что коэффициенты a_{ik} имеют третьи, а коэффициент c имеет первые непрерывные производные в $\Omega + \Gamma$, удовлетворяющие условию Липшица с положительным показателем. В качестве основного гильбертова пространства \mathcal{H} рассмотрим пространство $L_2(\Omega)$. За исходный оператор S возьмем замыкание в \mathcal{H} дифференциального оператора \mathcal{L} , рассматриваемого на дважды непрерывно дифференцируемых функциях, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе. Очевидно, оператор S — симметричный и положительно определенный. Операторы, соответствующие различным однородным граничным задачам для уравнения $\mathcal{L}g = h$, можно рассматривать как расширения оператора S . Нас будут интересовать только самосопряженные расширения. Очевидно, каждое такое расширение является частью сопряженного оператора S^* .

1. Характеристика операторов S, S^* и подпространства U . Из результатов О. А. Ладыженской ⁽⁴⁾ следует, что все функции из $D(S)$ принадлежат классу $L_2^{(2)}(\Omega)$ С. Л. Соболева ⁽⁵⁾ и вместе со своими первыми производными обращаются в нуль на Γ . Можно показать, что, обратно, всякая функция из $L_2^{(2)}(\Omega)$, обращающаяся в нуль на Γ вместе со своими первыми производными, принадлежит $D(S)$.

Перейдем к характеристике сопряженного оператора S^* . Непосредственно из определения сопряженного оператора следует, что S^* сов-

падает с оператором \mathcal{L} , рассматриваемым на тех функциях $g \in L_2(\Omega)$, для которых \mathcal{L} имеет смысл как обобщенный (см. (5)) и для которых $\mathcal{L}g \in L_2(\Omega)$. Другую характеристику оператора S^* дает следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор S^* совпадает с оператором, являющимся замыканием в $L_2(\Omega)$ оператора \mathcal{L} , рассматриваемого на дважды непрерывно дифференцируемых в $\Omega + \Gamma$ функциях.*

Перейдем к характеристике подпространства U решений уравнения $S^*u = 0$. Очевидно, U представляет собой множество обобщенных решений уравнения

$$\mathcal{L}u = 0, \quad (1)$$

суммируемых с квадратом. Из приведенной выше теоремы и результатов Жиро (6, 7) непосредственно следует, что множество дважды непрерывно дифференцируемых внутри Ω и непрерывно дифференцируемых в $\Omega + \Gamma$ решений уравнения (1) плотно в U . Это предложение весьма существенно* для построения введенных М. И. Вишиком основных граничных операторов γ_1 и γ_2 . Отметим еще, что поскольку дважды непрерывно дифференцируемые внутри Ω решения уравнения (1) образуют подпространство** в $L_2(\Omega)$, мы можем утверждать, что обобщенные решения уравнения (1) являются решениями в обычном смысле слова.

II. Жесткое расширение S_μ оператора S . Важное понятие жесткого расширения полуграниченного оператора введено М. Г. Крейнном (2). Им установлено также (9), что для обыкновенного дифференциального оператора порядка $2m$ жестким расширением является оператор задачи, отвечающей граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^k g}{\partial x^k} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial^k g}{\partial x^k} \right|_{x=b} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Нижеследующая теорема решает тот же вопрос для оператора S .

Теорема 2. *$D(S_\mu)$ состоит из всех тех функций $g \in L_2^{(1)}(\Omega) \cap D(S^*)$, которые обращаются в нуль на Γ . $D[S_\mu]$ состоит из всех тех функций $g \in L_2^{(1)}(\Omega)$, которые обращаются в нуль на Γ , и*

$$S_\mu[g, g] = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k} + c g \bar{g} \right\} d\Omega.$$

При доказательстве теоремы важную роль играет лемма С. Л. Соболева (5) к теореме о единственности решения задачи Дирихле.

Отметим, что приведенный результат сохраняет силу при более общих предположениях относительно коэффициентов оператора \mathcal{L} и для областей с кусочно-гладкой границей. Аналогичным путем можно установить, что для самосопряженных эллиптических уравнений высших порядков в областях с границей, имеющей вырожденные участки (см. (5)), «жесткой» является первая краевая задача.

III. Об основных граничных операторах М. И. Вишика. Важную роль при описании расширений оператора S с помощью граничных условий играют введенные М. И. Вишиком (1) основные граничные операторы γ_1 и γ_2 . Первоначально они определяются на U .

* Можно, как это делает М. И. Вишик, определить оператор S^* непосредственно как замыкание оператора \mathcal{L} , рассматриваемого на гладких функциях, а оператор S ввести формулой $S=S^*$. Однако без приведенного выше анализа даже для уравнения Лапласа остается неясным, включает ли соответствующее подпространство U , играющее важную роль в построениях М. И. Вишика, все интегрируемые с квадратом гармонические функции.

** См. (8).

Операторы γ_1 и $\gamma_2 S_\mu^{-1}$ изометрически отображают U на некоторые пространства H_1 и H_2 функций на границе. При этом М. И. Вишиком показано, что в пространство H_1 вложимо пространство $L_p(\Gamma)$ при $p \geq \frac{2(n-1)}{n}$, пространство H_2 вложимо в $L_q(\Gamma)$ при $q < \frac{2(n-1)}{n-2}$ и операторы вложения ограничены. Эти важные теоремы вложения доказаны М. И. Вишиком в предположении, что производные функции Грина задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}g = h$ всюду в $\Omega + \Gamma$ удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{A}{|x-y|^{n-1}}, \quad \left| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_i} \right| \leq \frac{A}{|x-y|^{n-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Однако трудно указать сколько-нибудь общие достаточные условия, при которых неравенства (2) имеют место. Укажем, как избежать использования оценок (2). Первую теорему вложения можно получить, не пользуясь представлением решения задачи Дирихле через функцию Грина, а опираясь на интегральные уравнения Жиро⁽⁶⁾ и соответствующее представление решения через потенциалы. Вторая теорема вложения может быть установлена на основании того простого замечания, что оператор вложения H_2 в $L_q(\Gamma)$ является сопряженным оператору вложения $L_p(\Gamma)$ в H_1 , а потому задан на всем H_2 и ограничен. При этом можно считать $q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$.

После того как операторы γ_1 и $\gamma_2 S_\mu^{-1}$ определены на U , М. И. Вишик распространяет их определение на все $D(S^*)$. Для наших целей удобно определить оператор γ_1 для более широкого множества $*D[S_M] = D[S_\mu] \dot{+} U$, полагая $\gamma_1 g = \gamma_1 u$, если $g = f + u$, $f \in D[S_\mu]$, $u \in U$.

IV. Главные и естественные граничные условия. Как показано М. И. Вишиком, всякое разрешимое (имеющее ограниченный обратный в \mathcal{H}) самосопряженное расширение \tilde{S} оператора S характеризуется граничным условием

$$\gamma_1 g = \tilde{B} \gamma_2 g. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{B} = \gamma_1 B (\gamma_2 S_\mu^{-1})^{-1}$, B — ограниченный самосопряженный оператор** в U . Оператор \tilde{B} переводит H_2 в часть H_1 . Обозначим $V = \overline{R(\tilde{B})}$, $W = U \ominus V$, $V_1 = \gamma_1 V$, $W_1 = \gamma_1 W$, $W_2 = \gamma_2 S_\mu^{-1} W$, $V_2 = \gamma_2 S_\mu^{-1} V$. Очевидно, $BW = \tilde{B}W_2 = 0$ и $R(\tilde{B}) = V_1$. Введем на $R(\tilde{B})$ обратный оператор $\tilde{B}^{-1} = \gamma_2 S_\mu^{-1} B^{-1} \gamma_1^{-1}$. Условие (3) эквивалентно совокупности следующих условий:

$$P_{W_1} \gamma_1 g = 0, \quad (4)$$

$$\gamma_1 g \in D(\tilde{B}^{-1}), \quad (5)$$

$$\tilde{B}^{-1} \gamma_1 g = P_{V_2} \gamma_2 g. \quad (6)$$

Здесь P_{W_1} — проектор в W_1 , P_{V_2} — проектор в V_2 . Граничные условия в виде (4) — (6) удобны для характеристики множества $D[\tilde{S}]$, если \tilde{S} — полуограниченный оператор. Согласно (3)

$$D[\tilde{S}] = D[S_\mu] \dot{+} D[B^{-1}], \quad (7)$$

если оператор B^{-1} рассматривать как самосопряженный оператор в V .

* S_M — введенное М. Г. Крейном «мягкое» расширение оператора S . Легко видеть, что $D(S_M)$ можно охарактеризовать граничным условием $\gamma_2 g = 0$.

** См. (1), а также (3).

Из (7) следует, что для $g \in D[\tilde{S}]$ выполнено (4), так как $\gamma_1 g \in V_1$. Кроме того,

$$\gamma_1 g \in \gamma_1 D[B^{-1}]. \quad (8)$$

Таким образом, функции из $D[\tilde{S}]$ удовлетворяют условиям (4) и (8). Легко убедиться, что эти условия являются также достаточными условиями принадлежности к $D[\tilde{S}]$. В соответствии с принятой в вариационном исчислении терминологией назовем (6) естественным граничным условием. Условия (5) и (8) будем называть условиями гладкости, а условие (4) — главным* граничным условием. Очевидно, $\gamma_1 D[B^{-1}] \supset \supset D(B^{-1}) = \gamma_1 D(B^{-1})$. Поэтому можно сказать, что множество $D[\tilde{S}]$ характеризуется главными граничными условиями и условиями гладкости в смягченной форме (8). Подобное разложение граничных условий на главные и естественные может быть произведено для любого (а не только разрешимого) самосопряженного расширения оператора S .

Отметим в заключение, что результаты пп. I и III легко могут быть перенесены на случай общих эллиптических уравнений второго порядка.

Ленинградский горный
институт

Поступило
6 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. И. Вишик, Тр. Моск. матем. об-ва, 1 (1952). ² М. Г. Крейн, Матем. сборн., 20 (62), 3, 431 (1947). ³ М. Ш. Бирман, ДАН, 91, № 2 (1953). ⁴ О. А. Ладженская, ДАН, 79, № 5 (1951). ⁵ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. ⁶ G. Giraud, Ann. de l'Es. Norm., (3), 46, No. 5 (1929). ⁷ G. Giraud, *ibid.*, 47, No. 7 (1930). ⁸ С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, 1952. ⁹ М. Г. Крейн, Матем. сборн., 21 (63), 3, 365 (1947).

* См. (9), где аналогичный вопрос разбирается для обыкновенных дифференциальных уравнений.