

В. Л. ДАНИЛОВ

О ДЕБИТЕ НЕФТЯНОЙ СКВАЖИНЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ  
ФОРМЕ КОНТУРА ПИТАНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 20 VI 1953)

1. Существенный интерес для подземной гидравлики представляет задача определения дебитов нефтяных скважин в плоском пласте при произвольной форме контура питания. Для изотропного плоского пласта, вскрытого на всю глубину, проекции скорости фильтрации на основании закона Дарси имеют вид:

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y},$$

где  $k$  — проницаемость пласта,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $p$  — давление. Присоединяя к этим уравнениям уравне-

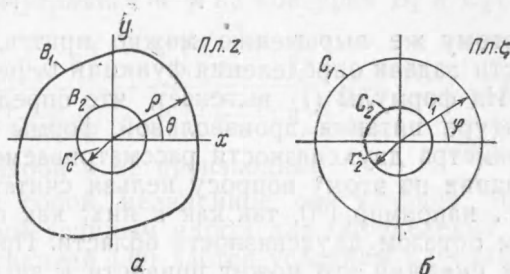


Рис. 1

ние неразрывности для плоского течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

убеждаемся, что давление — гармоническая функция. Рассмотрим единичную скважину в пласте произвольной формы (рис. 1 а). Известны давление  $p_n$  на контуре питания  $B_1$  и давление  $p_c$  на забое скважины  $B_2$ . Введем для удобства потенциал скоростей  $\varphi = -\frac{k}{\mu} p$ . Значения его известны на границе  $B_1$  ( $\varphi_1 = -\frac{k}{\mu} p_n$ ) и на границе  $B_2$  ( $\varphi_2 = -\frac{k}{\mu} p_c$ ). Таким образом, нахождение  $\varphi(x, y)$  либо  $p(x, y)$  сводится к решению задачи Дирихле для двухсвязной области.

2. Введем комплексный потенциал течения в плоскости  $z$ :

$$W = \varphi + i\psi.$$

Здесь  $\psi$  — функция тока. Заметим, что  $W$  — многозначная функция, так как при обходе в положительном направлении по контуру, охватывающему скважину  $B_2$ , функция  $\psi$  приобретает приращение  $\psi_A^* - \psi_A = -Q$ , где  $Q$  — дебит скважины. Для определения дебита отобразим конформно двухсвязную область течения  $D$  (рис. 1 а) на круговое кольцо  $\Delta$  в плоскости  $\zeta$  (рис. 1 б). Из теории конформных отображений известно, что функция, реализующая это отображение для двухсвязной области, границы которой не вырождены (в точки),

всегда существует и определена единственным образом, если задана точка границы кольца  $\Delta$ , соответствующая некоторой точке границы области  $D$  (1). Пусть при этом отображении контур питания  $B_1$  переходит во внешнюю окружность  $C_1$  радиуса  $r_1$ , а контур скважины  $B_2$  — во внутреннюю окружность  $C_2$  радиуса  $r_2$ . Важно отметить, что отношение  $q = r_2/r_1$  является вполне определенным для данной двухсвязной области  $D$ ; будем называть его параметром двухсвязности. Для области с невырожденными границами  $0 < q < 1$  \*.

Без уменьшения общности можно положить  $r_1 = 1$ , тогда  $q$  численно равен радиусу  $r_2$ . Параметр  $q$  определяет класс двухсвязной области: лишь области одного класса, т. е. с одинаковым значением параметра  $q$ , могут быть конформно отображены друг на друга.

Как известно, при конформном отображении сохраняется многозначность функции  $\psi$ , следовательно, и дебит  $Q$ . К области  $\Delta$  можно непосредственно применить формулу Дюпюи для дебита скважины, расположенной в центре кругового контура питания. На окружности  $C_1$  — давление  $p_n$ , на  $C_2$  — давление  $p_c$ . Тогда

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_n - p_c}{\ln(r_1/r_2)} = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_n - p_c}{\ln(1/q)} \quad (1)$$

К этому же выражению можно притти, составив условие разрешимости задачи определения функции  $\psi$ , регулярной в кольцевой области.

Из формулы (1) вытекает, что определение дебита скважины при контуре питания произвольной формы сводится к задаче отыскания параметра двухсвязности рассматриваемой области. Имеющиеся исследования по этому вопросу нельзя считать правильными без оговорок (см., например, (2)), так как в них, как правило, не учитывалась должным образом двухсвязность области. При расчете дебитов укрупненных скважин это может привести к значительным погрешностям.

3. В литературе по подземной гидравлике встречается понятие приведенного радиуса питания, означающего радиус такого кругового пласта, в котором скважина, расположенная в центре, имеет тот же дебит, что и скважина в рассматриваемом пласте, при тех же свойствах коллектора и жидкости и давлениях на границах (3). Обозначая приведенный радиус через  $R_{np}$  и радиус скважины через  $r_c$ , имеем

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_n - p_c}{\ln(R_{np}/r_c)} \quad (2)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (1), получаем

$$R_{np} = r_c / q \quad (3)$$

Отсюда ясно, что задача определения приведенного радиуса питания эквивалентна задаче отыскания параметра  $q$ .

4. Когда отображающая функция  $\zeta(z)$  находится просто, вычисление параметра  $q$  не составляет особого труда. Например, для скважины радиуса  $r$ , расположенной в круговом пласте радиуса  $R$ , центр которой отстоит на расстоянии  $a$  от центра пласта, имеем формулу (3):

$$q = \frac{2rR}{R^2 + r^2 - a^2 + \sqrt{(R^2 - r^2 - a^2)^2 - 4r^2a^2}}$$

При произвольном контуре питания для определения  $q$  можно воспользоваться графо-аналитическим методом Н. В. Мелентьева (4).

5. Можно предложить аналитический метод определения параметра двухсвязности.

\* Иногда пользуются величиной  $M = 1/q$  — так называемым модулем двухсвязной области. Очевидно, для области с невырожденными границами  $1 < M < \infty$ .

\*\* Мощность пласта всюду принята равной единице.

Рассмотрим случай конечного контура питания произвольной формы (рис. 1а). Потребуем, чтобы при конформном отображении контур питания  $B_1$  в плоскости  $z$  перешел в окружность единичного радиуса  $C_1$  в плоскости  $\zeta$ , а контур скважины  $B_2$  — в окружность  $C_2$  некоторого, подлежащего определению, радиуса  $q$ . Для единственности отображающей функции положим далее, что точка контура  $B_1$ , лежащая справа на вещественной оси, переходит в точку  $\zeta = 1$  границы  $C_1$ . Пусть уравнение контура  $B_1$  в полярных координатах имеет вид  $\rho = \rho(\theta)$ . Обозначим  $\mu(\theta) = \ln \frac{\rho(\theta)}{\rho_0}$ , где  $\rho_0 = \rho(0)$ . Уравнение контура  $B_2$  в комплексной форме  $z = r_c e^{i\theta}$ , где  $r_c$  — радиус скважины. В плоскости  $\zeta$  контур  $C_1$  определен уравнением  $\zeta = e^{i\varphi}$  ( $\varphi$  — полярный угол), а контур  $C_2$  — уравнением  $\zeta = q e^{i\varphi}$ . Возьмем далее функцию, конформно преобразующую область  $\Delta$  в область  $D$ , в виде

$$z = \rho_0 \zeta e^{h(\zeta)}, \quad (4)$$

где  $h(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$  — ряд Лорана с комплексными коэффициентами.

После некоторых преобразований можно получить следующее соотношение между полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$  на контурах  $B_1$  и  $C_1$  (5):

$$\theta - \varphi = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \left[ \frac{\vartheta_1' \left( \frac{\varphi'}{2\pi}; q \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\varphi'}{2\pi}; q \right)} - \frac{\vartheta_1' \left( \frac{\varphi' - \varphi}{2\pi}; q \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\varphi' - \varphi}{2\pi}; q \right)} \right] d\varphi'; \quad (5)$$

здесь  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_1'$  — этта-функция Якоби и ее производная.

Уравнение (5) представляет собой нелинейное сингулярное интегральное уравнение с несимметричным ядром для определения  $\theta$ . Связь между параметром  $q$  и функцией  $\mu(\theta)$  дается условием однозначности отображающей функции:

$$q = \frac{r_c}{\rho_0} e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) d\theta}. \quad (6)$$

Решая уравнение (5) совместно с (6), определим  $\theta(\varphi)$  и  $q$ . Если  $r$  — минимальное значение  $\rho(\theta)$  и  $R$  — максимальное его значение, то нетрудно получить оценку:

$$r_c / r > q > r_c / R. \quad (7)$$

Задаваясь несколькими значениями на этом интервале, решим уравнение (5) методом последовательных приближений для каждого фиксированного  $q_i$ . По полученной зависимости  $\theta(\varphi, q_i)$  найдем

$$P(q_i) = q_i - \frac{r_c}{\rho_0} e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi, q_i) d\varphi}.$$

Проводя через полученные точки в осях  $q, P(q)$  непрерывную кривую, найдем искомое значение  $q$  как точку пересечения кривой  $P(q)$  с осью  $q$ , что следует из (6). Легко показать единственность  $q$ . Можно применить и перекрестный процесс последовательных приближений, подставляя в соотношение (6) некоторое исходное  $q_{(0)}$ , удовлетворяющее неравенству (7), и  $\theta_{(0)} = \varphi$ , а затем полученное  $q_{(1)}$  — в уравнение (4). Решаем это уравнение методом последовательных приближений. Полученную зависимость  $\theta_{(1)}(\varphi)$  подставляем в соотношение (5) и т. д.

Условия сходимости процесса последовательных приближений были в самое последнее время исследованы Б. И. Гехтом (6). Расчеты пока-

зывают, что для звездных контуров  $B_1$  достаточно ограничиться вторым приближением.

6. Можно рассмотреть и многоскважинные системы.

Пусть имеется плоский однородный изотропный пласт с контуром питания  $B_0$  произвольной формы, в котором размещены  $m$  скважин,

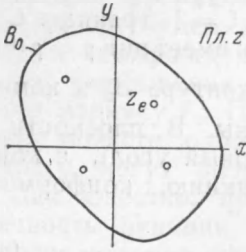


Рис. 2

совершенных по степени и характеру вскрытия, с координатами центров  $z_1, \dots, z_m$ , радиусами  $r_1, \dots, r_m$  и давлениями на забоях, соответственно,  $p_{c_1}, \dots, p_{c_m}$ , причем эти давления могут быть функциями времени (рис. 2). Давление на контуре питания  $B_0$  равно  $p_n$ . Требуется определить дебиты скважин  $Q_1, \dots, Q_m$ .

Введем следующие допущения, обычно выполняющиеся на практике для неукрупненных скважин: 1) скважины достаточно удалены от контура питания и размеры их весьма малы сравнительно с размерами контура питания; 2) расстояния между скважинами велики сравнительно с радиусами скважин.

Если  $\zeta(z)$  — функция, конформно отображающая область, ограниченную  $B_0$ , на внутренность единичного круга, то путем последовательных отображений получаем для определения дебитов систему  $m$  линейных неоднородных уравнений:

$$Q_l \ln \frac{1 - |\zeta(z_l)|^2}{r_l |d\zeta(z_l)/dz|} + \sum_{i=1}^m Q_i \ln \left| \frac{1 - \overline{\zeta(z_l)} \zeta(z_i)}{\zeta(z_i) - \zeta(z_l)} \right| = \frac{2\pi k}{\mu} (p_n - p_{c_l})$$

$$(l = 1, 2, \dots, m).$$

Штрих при  $\Sigma$  означает, что в сумме опущен член с индексом  $i = l$ .

Эта система по существу совпадает с системой, полученной И. А. Чарным иным путем (7).

Отображающую функцию можно искать различными путями, например в виде (4), где  $h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$  — ряд Тейлора с комплексными коэффициентами. Тогда задача сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения

$$\theta - \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi'}{2} d\varphi'.$$

О решении его см., например, (8).

Физико-технический институт  
Казанского филиала  
Академии наук СССР

Поступило  
11 V 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. В. Келдыш, Усп. матем. наук, в. 6 (1939). <sup>2</sup> М. Маскет, Течение однородных жидкостей в пористой среде, М.—Л., 1949. <sup>3</sup> В. Н. Щелкачев, Г. Б. Пыхачев, Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем, Баку, 1939. <sup>4</sup> Л. В. Канторович, Г. Б. Крылов, Методы приближенного решения уравнений в частных производных, 1936. <sup>5</sup> В. Л. Данилов, К расчету гидродинамических решеток, Кандидатск. диссерт., Казань, 1951. <sup>6</sup> Б. И. Гехт, Разрешимость нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, Кандидатск. диссерт., Казань, 1952. <sup>7</sup> И. А. Чарный, ДАН, 42, № 4 (1944). <sup>8</sup> А. И. Гусейнов, Матем. сборн., нов. сер., 20 (62), № 2, 293 (1947).