

И. А. ЧАРНЫЙ

РАСЧЕТ ДЕБИТА НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ ПЕРЕД  
ПРОРЫВОМ ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ ИЛИ ВЕРХНЕГО ГАЗА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 22 VI 1953)

В заметке (1) было показано, что предельный дебит несовершенной нефтяной скважины (см. рис. 1), при котором начинается прорыв воды в скважину, удовлетворяет неравенству

$$Q_1 > Q_{\text{пред}} > Q_2, \quad (1)$$

где  $Q_1$  — дебит невозмущенного движения, при котором кривая  $A'B'C'D'$  распределения потенциала вдоль оси скважины  $\Phi(0, z)$  (рис. 2) касается прямой  $DB''$ , составляющей угол  $\beta = \arctg(k\Delta\gamma/\mu)$

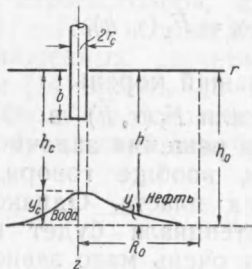


Рис. 1

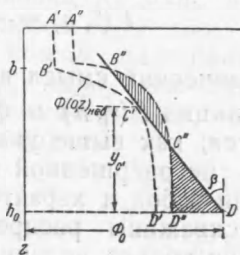


Рис. 2

с вертикалью;  $Q_2$  — дебит невозмущенного движения, соответствующий условию, когда эта прямая  $DB''$  отсекает на кривой  $A''B''C''D''$  сегмент  $B''C''C''B''$ , равный треугольнику  $DC''D$ ;  $k$  — проницаемость;  $\mu$  — вязкость нефти;  $\Delta\gamma$  — разность объемных весов воды и нефти. На рис. 2:  $\Phi_0$  — потенциал нефтяной части на границе раздела на расстоянии  $R_0$ , где нефтеносная мощность равна  $h_0$ ;  $r_c$  — радиус скважины;  $b$  — глубина вскрытия (см. рис. 1). Возмущенным движением называется движение при неплоской, деформированной границе раздела покоящейся воды и движущейся нефти (водяной конус), невозмущенным — напорный приток нефти к скважине в пласте мощностью  $h_0$  при горизонтальных и непроницаемых кровле и подошве, т. е. когда воды не имеется. Таким образом, оценку (1) можно выполнить, зная распределение потенциала  $\Phi(0, z)$  из решения задачи о напорном притоке к несовершенной скважине с заданным дебитом  $Q$ . Связь между  $\Phi(0, z)$  и  $Q$  можно задать в безразмерном виде

$$\Phi(0, z) = \Phi_0 - \frac{Q}{h_0} F(\zeta, \bar{h}), \quad \zeta = \frac{z}{h_0}, \quad \bar{h} = \frac{b}{h_0}, \quad (2)$$

где функцию  $F(\zeta, \bar{h})$  будем считать известной.

Ордината точки пересечения прямой  $DB''$  рис. 2 и кривой  $\Phi(0, z)$  найдется из уравнения  $\Phi_0 - \frac{Q}{h_0} F(\zeta, \bar{h}) = \Phi_0 - \frac{k\Delta\gamma}{\mu} (h_0 - z) = \Phi_0 - \frac{k\Delta\gamma h_0}{\mu} (1 - \zeta)$  или

$$F(\zeta, \bar{h}) = \frac{k\Delta\gamma h_0^2}{\mu Q} (1 - \zeta). \quad (3)$$

Имея семейство кривых  $F(\zeta, \bar{h})$ , легко найти графически дебит, соответствующий заданной ординате  $\zeta$ , в том числе и предельный дебит  $Q_1$ , соответствующий точке касания кривой  $F(\zeta, \bar{h})$  и прямой  $\frac{k\Delta\gamma h_0^2}{\mu Q} (1 - \zeta)$ . Ординату точки касания и дебит  $Q = Q_1$  можно найти также аналитически из уравнения (3) и условия

$$\frac{\partial \Phi(0, z)}{\partial z} = \frac{k\Delta\gamma}{\mu} \quad \text{или} \quad -\frac{Q}{h_0^2} \frac{dF(\zeta, \bar{h})}{d\zeta} = \frac{k\Delta\gamma}{\mu}. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4) относительно  $\zeta$  и  $Q$ , найдем дебит  $Q = Q_1$  и ординату точки касания  $C'$  рис. 2. Для удобства можно ввести отношение

$$\eta = \frac{y}{h_0 - b} = \frac{h_0 - z}{h_0 - b} = \frac{1 - \zeta}{1 - \bar{h}}, \quad (5)$$

указывающее высоту подъема в долях расстояния от подошвы до доньшка скважины (рис. 1). Тогда условие (3) можно представить еще так:

$$F(\zeta, \bar{h}) = \frac{k\Delta\gamma h_0^2}{\mu Q} (1 - \bar{h}) \eta = F_1(\eta, \bar{h}), \quad (6)$$

причем физический смысл имеет наименьший корень.

Вид функции  $F(\eta, \bar{h})$  в формуле (2) или  $F_1(\eta, \bar{h})$  в формуле (6) определяется, как выше указывалось, из решения задачи о напорном притоке к несовершенной скважине и, вообще говоря, зависит от конструкции забоя и характера вскрытия пласта. Однако вдали от доньшка скважины распределение потенциала будет практически определяться только величиной дебита и очень мало зависеть от вида распределения потенциала на вскрытой части стенки скважины. Поэтому можно воспользоваться наиболее простой формой решения, соответствующей постоянной радиальной составляющей скорости фильтрации вдоль вскрытой стенки скважины. Под забойным потенциалом при этом следует подразумевать среднее значение потенциала вдоль вскрытой стенки скважины.

Если вертикальная проницаемость пласта  $k_v$  отличается от горизонтальной  $k_r$ , то распределение потенциала  $\Phi = k_r p / \mu$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad x = \sqrt{k_r / k_v}. \quad (7)$$

Для скважины, перфорированной в верхней части на участке  $0 < z < b$  и обсаженной на участке  $b < z < h_0$  (рис. 1), решение уравнения (7) при условиях

$$z = 0, \quad z = h_0, \quad r_c < r < R_0, \quad \partial \Phi / \partial z = 0; \quad (8)$$

$$r = R_0, \quad \Phi = \Phi_0; \quad r = r_c, \quad \frac{k_r}{\mu} \left( 2\pi r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=r_c} = q(z); \quad (9)$$

$$q(z) = Q / b, \quad 0 < z < b; \quad q(z) = 0, \quad b < z < h_0 \quad (10)$$

имеет вид

$$\Phi(r, z) = \Phi_0 - \frac{q_0}{2\pi} \ln \frac{R_0'}{r} + \frac{\chi h_0}{2\pi^2 r_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n\pi r / \chi h_0)}{n U'(n\pi r_c / \chi h_0)} q_n \cos \frac{n\pi z}{h_0}; \quad (11)$$

$$q_0 = \frac{Q}{h_0}; \quad q_n = \frac{2Q}{n\pi b} \sin \frac{n\pi b}{h_0};$$

$$U\left(\frac{n\pi r}{\chi h_0}\right) = I_0\left(\frac{n\pi r}{\chi h_0}\right) K_0\left(\frac{n\pi R_0}{\chi h_0}\right) - I_0\left(\frac{n\pi R_0}{\chi h_0}\right) K_0\left(\frac{n\pi r}{\chi h_0}\right); \quad (12)$$

$I_0, K_0$  — функции Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка первого и второго рода. Так как здесь должно быть  $r > r_c$ , то, согласно (2), (11) и (12), получим, заменяя в (2)  $\Phi(0, z)$  обозначением  $\Phi(r_c, z)$ :

$$F(\zeta, \bar{h}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r_c} - \frac{\chi h_0^2}{\pi^2 b r_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{U(n\pi r_c / \chi h_0)}{U'(n\pi r_c / \chi h_0)} \sin n\pi \bar{h} \cos n\pi \zeta. \quad (13)$$

Для необсаженной в нижней части скважины можно воспользоваться решением Маскета (2), которое для общего случая  $\chi \neq 1$  принимает вид для скважины стока:

$$\Phi(0, z) = -\frac{Q}{4\pi b} f_1(\zeta, \bar{h}) + \text{const}; \quad \Phi_0 = -\frac{Q}{2\pi h_0} \ln \frac{4\chi h_0}{R_0} + \text{const}; \quad (14)$$

$$f_1(\zeta, \bar{h}) = -\ln \frac{\Gamma(1 + 0,5\zeta + 0,5\bar{h}) \Gamma(1 - 0,5\zeta + 0,5\bar{h})}{\Gamma(1 - 0,5\zeta - 0,5\bar{h}) \Gamma(1 + 0,5\zeta - 0,5\bar{h})} + \ln \frac{\zeta + \bar{h}}{\zeta - \bar{h}},$$

$\Gamma$  — гамма-функция. При этом следует иметь в виду, что второе уравнение (14), строго говоря, дано для условия  $R_0 \geq \chi h_0$ , в отличие от формул (11) — (13), справедливых при любом значении аргументов. Для приближенных расчетов, однако, можно пользоваться вторым уравнением (14) вплоть до значений  $R_0 \geq 1/4 \chi h_0$ , без существенных ошибок. Используя основные свойства гамма-функции, после некоторых преобразований получим, учитывая (5):

$$\begin{aligned} f_1(\zeta, \bar{h}) &= 2 \ln \frac{\zeta + \bar{h}}{\zeta - \bar{h}} - 2 \ln \frac{\Gamma(1 + 0,5\zeta + 0,5\bar{h})}{\Gamma(1 + 0,5\zeta - 0,5\bar{h})} - \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\zeta + \bar{h})}{\sin \frac{\pi}{2} (\zeta - \bar{h})} = \\ &= 2 \ln \frac{0,5 - 0,5\eta(1 - \bar{h}) + 0,5\bar{h}}{0,5 - 0,5\eta(1 - \bar{h}) - 0,5\bar{h}} - 2 \ln \frac{\Gamma[1,5 - 0,5\eta(1 - \bar{h}) + 0,5\bar{h}]}{\Gamma[1,5 - 0,5\eta(1 - \bar{h}) - 0,5\bar{h}]} - \\ &- \ln \frac{\sin \pi [0,5 - 0,5\eta(1 - \bar{h}) + 0,5\bar{h}]}{\sin \pi [0,5 - 0,5\eta(1 - \bar{h}) - 0,5\bar{h}]} = f(\eta, \bar{h}) = f_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Графики функции  $f(\eta, \bar{h})$  приведены на рис. 3. Из формул (2) и (14) получим:

$$\Phi_0 - \Phi(0, z) = \frac{Q}{h_0} F(\zeta, \bar{h}) = \frac{Q}{h_0} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_0}{4\chi h_0} + \frac{h_0}{4\pi b} f_1 \right); \quad (16)$$

$$f(\eta, \bar{h}) = \frac{4\pi \bar{h} (1 - \bar{h}) k \Delta \gamma h_0^2}{\mu Q} \eta - 2\bar{h} \ln \frac{R}{4\chi h_0} = K\eta - 2\bar{h} \ln \frac{R_0}{4\chi h_0}, \quad (17)$$

$$K = 4\pi \bar{h} (1 - \bar{h}) \frac{k \Delta \gamma h_0^2}{\mu Q}. \quad (18)$$

Таким образом, определяя угловой коэффициент  $K = K_1$ , соответствующий точке касания  $C$  (рис. 2), мы получим заведомо завышенный дебит  $Q = Q_1$ . Угловой коэффициент  $K = K_2$ , соответствующий равенству сегмента  $B''C''C'B''$  и треугольника  $C''D''D$ , дает заведомо заниженный дебит  $Q = Q_2$ .

На рис. 3 показаны две прямые для  $\bar{h} = 0,1$ ,  $R_0/4h_0 = 1$ , причем  $K_1 \approx 0,96$ ,  $K_2 \approx 1,24$ . Площадь сегмента определялась графически. Положение прямой с угловым коэффициентом  $K_2 \approx 1,24$  было найдено подбором. Аналогичный порядок расхождения между  $K_1$  и  $K_2$  (около 30%) получается и для других условий. Следует предполагать, что  $Q_{\text{пред}}$  будет ближе к  $Q_1$ , нежели к  $Q_2$ . Таким образом, уменьшая

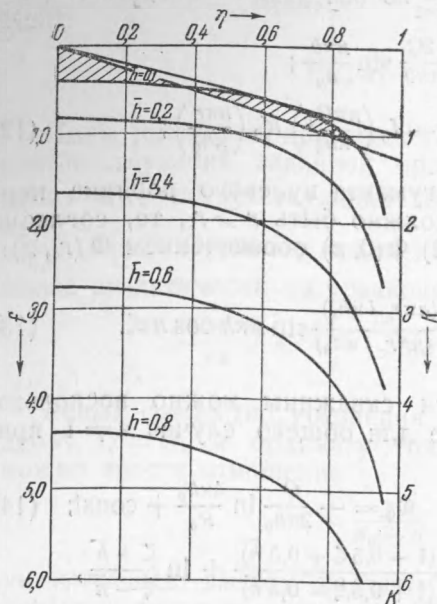


Рис. 3

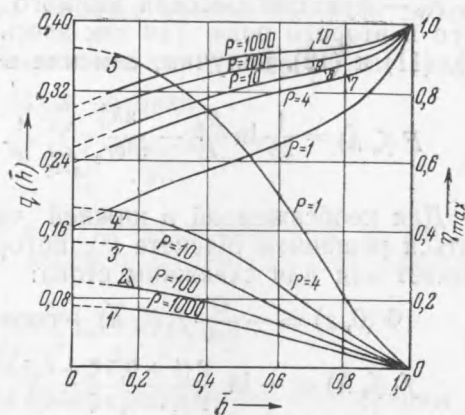


Рис. 4. Кривые 1—5 для  $q(\bar{h})$ ; 6—10 для  $\eta_{\text{max}}$

$Q_1$  на 15—20%, мы будем вблизи истинного значения предельного безводного дебита.

Для удобства расчетов на рис. 4 показаны кривые безразмерного дебита  $q(\bar{h})$  для разных значений параметра  $R_0/4h_0 = \rho$ ,  $q(\bar{h}) = Q_1/Q_0$ ,  $Q_0 = \frac{2\pi kh_0}{\mu} \Delta\gamma h_0 = \frac{2\pi k}{\mu} \Delta\gamma h_0^2$ . Кривые  $q(\bar{h})$  были построены в результате совместного решения уравнений (3) и (4) для  $F(\zeta, \bar{h})$ , заданной формулой (16). На рис. 4 показаны также значения  $\eta_{\text{max}}$ , соответствующие  $Q_1$ .

Для значений параметра  $\rho = R_0/4h_0$ , не указанных на рис. 4,  $q(\bar{h})$  можно определить графической интерполяцией, имея в виду, что при  $\rho \rightarrow \infty$   $q(\bar{h}) \rightarrow 0$ , а при  $\rho \rightarrow 0$   $q(\bar{h}) \rightarrow \infty$ . В первом случае следует строить кривую зависимости  $q(\bar{h})$  от аргумента  $1/\rho$ , во втором — кривую зависимости  $1/q(\bar{h})$  от аргумента  $\rho$ . Обе кривые пройдут через начало координат и легко могут быть построены по 3—4 точкам для любого значения  $\bar{h}$  с помощью рис. 4.

При прорыве верхнего газа сохраняются прежние результаты, но под  $\Delta\gamma$  следует подразумевать разность объемных весов нефти и газа.

Все вычисления и построения графиков были выполнены В. А. Евдокимовой.

Поступило  
10 VI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> И. А. Чарный, ДАН, 91, № 6 (1953). <sup>2</sup> М. Маскет, Движение однородной жидкости в пористой среде, 1949.