Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VI 1953)

Мы будем рассматривать линейное комплексное нормированное пространство R, состоящее из комплекснозначных функций, заданных на коммутативной бикомпактной группе G (с аддитивной записью операции). Предполагается, что вместе с каждой функцией $f(t) \in R$ все ее сдвиги $f(t+h)$ также принадлежат пространству R и что операция сдвига обладает следующими свойствами:

а) $\| f(t+h) \| = \| f(t) \|$ для любой $f(t) \in R$ и любого $h \in G$;

б) $\lim\limits_{h \to 0} \| f(t+h) - f(t) \| = 0$ для любой $f(t) \in R$.

Пространство R с указанными свойствами называется однородным пространством функций ([1]).

Целью заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Критерием компактности множества $M \subset R$ является выполнение следующих условий:* 1) *ограниченность множества M в пространстве R;* 2) *равностепенная непрерывность элементов множества M относительно сдвига.*

При этом под равностепенной непрерывностью мы понимаем следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U нуля группы G, что из $h \in U$ следует $\| f(t+h) - f(t) \| < \varepsilon$ для любой функции $f(t) \in M$.

Доказательство необходимости условий. Прежде всего, всякое компактное множество M всегда ограничено. Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ компактное множество M обладает конечной $\frac{\varepsilon}{3}$-сетью $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$. Найдем такую окрестность U нуля группы G, чтобы для любого $h \in U$ выполнялись неравенства $\| f_j(t+h) - f_j(t) \| < \frac{\varepsilon}{3}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда для любой функции $f(t) \in R$, выбрав соответствующую функцию $f_j(t)$ из $\frac{\varepsilon}{3}$-сети, мы будем иметь:

$$\| f(t+h) - f(t) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| f(t+h) - f_j(t+h) \| + \| f_j(t+h) - f_j(t) \| + \| f_j(t) - f(t) \| < \varepsilon,$$

что и означает равностепенную непрерывность элементов множества M относительно сдвига.

Доказательство достаточности условий. Пусть M ограничено и элементы $f(t) \in M$ равностепенно непрерывны относительно сдвига. Пусть, далее,

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}(f)\,\chi_{\alpha}(f)$$

есть ряд Фурье функции $f(t) \in M$ по непрерывным характерам группы G.

Известно [1], что этот ряд Фурье может быть просуммирован к функции $f(t)$ по норме с помощью некоторого процесса суммирования фейеровского типа. Точнее говоря, для каждой окрестности нуля U_{λ} группы G и любого $\delta > 0$ возможно определить (вещественную) функцию $h_{\lambda}(t) = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} p_j^{(\lambda)} \chi_j^{(\lambda)}(t)$, удовлетворяющую условиям

$$h_{\lambda}(t) > 0, \quad \int_G h_{\lambda}(t)\,dt = 1, \quad h_{\lambda}(t) < \delta \text{ вне } U_{\lambda}; \tag{1}$$

тогда, если построить функцию $\sigma_f^{(\lambda)}(t) = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} p_j^{(\lambda)} c_j^{(\lambda)}(f)\,\chi_j^{(\lambda)}(t)$, то будет иметь место равенство

$$\sigma_f^{(\lambda)}(t) - f(t) = \int_G [f(t-\tau) - f(t)]\,h_{\lambda}(\tau)\,d\tau.$$

Из этого равенства и условий (1) вытекает, что, выбирая окрестность U_{λ} достаточно малой, можно сделать разность $\sigma_f^{(\lambda)}(t) - f(t)$ как угодно малой по норме; при этом результат зависит лишь от модуля непрерывности функции $f(t)$ и, следовательно, осуществляется одновременно для всех функций равностепенно непрерывного семейства M. Таким образом, обобщенные фейеровские суммы $\sigma_f^{(\lambda)}(t)$ стремятся к соответствующим функциям $f(t)$ с одинаковой скоростью: для любого $\varepsilon > 0$ можно найти индекс λ так, чтобы выполнялись одновременно все неравенства

$$\| \sigma_f^{(\lambda)}(t) - f(t) \| < \varepsilon \qquad (f \in M).$$

Но обобщенные фейеровские суммы $\sigma_f^{(\lambda)}(t)$ при фиксированном λ суть элементы конечномерного пространства (линейной оболочки конечного числа характеров); они образуют в этом пространстве ограниченное множество (поскольку ограничены по норме все $f \in M$), которое, как всякое ограниченное множество в конечномерном пространстве, компактно. Итак, при каждом $\varepsilon > 0$ мы нашли для множества M компактную ε-сеть. Но в таком случае и само множество M компактно, что и утверждалось.

Изложенный критерий компактности позволяет строить на коммутативных бикомпактных группах аналоги известных критериев компактности для конкретных функциональных пространств (например, критерий Арцела — для пространства непрерывных функций, критерий Рисса — для пространства функций, интегрируемых в p-й степени, и др.).

Поступило
16 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 6, в. 1 (41), 92 (1951).