Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCII, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. Н. РОЖАНСКАЯ

О ТОЧЕЧНОМ ХАРАКТЕРЕ СПЕКТРА НЕКОТОРОГО КЛАССА МАТРИЦ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 VI 1953)

В заметке рассматривается бесконечная матрица $M(a_{ik})$; $i,\ k=1,2,\ldots$, преобразующая аналитическое пространство A_R, $0<R<\infty$, в себя ([1, 2]). Исследуя спектр матрицы M на расширенной комплексной плоскости, условимся значение $\lambda=\infty$ считать регулярным или точкой спектра, смотря по тому, имеет ли матрица M обратную, преобразующую A_R в себя, или нет.

Вопрос о характере спектра таких матриц впервые рассматривался М. Г. Хаплановым ([4]), сводившим этот вопрос к рассмотрению некоторого интегрального уравнения. Им были указаны достаточные условия наличия у матрицы чисто точечного спектра.

В настоящей заметке изучение спектра ведется методом сходящихся последовательностей матриц. Полученное здесь условие наличия у матрицы чисто точечного спектра (теорема 3) обобщает соответствующее условие М. Г. Хапланова.

Последовательность матриц M_n, преобразующих координатное пространство $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}_1$, называется сходящейся (соответственно, сильно сходящейся) к матрице M ([5]), если для любой точки $x\in\mathscr{E}$ точка $M\cdot x$ является $Л$-пределом (соответственно, сильным $Л$-пределом) последовательности точек $M_n\cdot x$ в пространстве $\mathscr{E}_1$.

Теорема 1. *Пусть матрица $M(a_{ik})$ удовлетворяет условиям:*

а) $|a_{ik}|\leqslant Nq^k$ *при* $k>i$, $0<q<1$, $N>0$ *любое*;

$$\text{б) } \sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}|\leqslant l,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|\leqslant l,\quad l<1. \tag{1}$$

Тогда матрица $E-M$ преобразует пространство A_1 в себя и имеет обратную матрицу $(E-M)^{-1}=E+M+M^2+\ldots+M^n+\ldots$, преобразующую пространство A_1 в себя.

Доказательство теоремы основывается на двух леммах.

Лемма 1. *Если последовательности $\{M_n\}$ и $\{L_n\}$ матриц, преобразующих пространство A_R в себя, сходятся, соответственно, к матрицам M и L, то последовательность произведений $\{M_n\cdot L_n\}$ сходится к матрице $M\cdot L$.*

Лемма 2. *Если существует точка $b(b_1, b_2,\ldots)\in A_1$ и числа q, $0<q<1$, и $\nu>0$ такие, что для всех n в совокупности выполняются условия:* 1) $|a_{ik}^{(n)}|\leqslant b_i$ *для всех* k; 2) $|a_{ik}^{(n)}|\leqslant q^k$ *при* $k>\nu\cdot i$ *и существуют поэлементные пределы* $\lim\limits_{n\to\infty}a_{ik}^{(n)}=a_{ik}$, *то последовательность матриц $M_n(a_{ik}^{(n)})$ сходится к матрице $M(a_{ik})$.*

Доказательство теоремы. Образуем матрицу $S_n=M+M^2+\ldots+M^n$; ее элементами будут $s_{ik}^{(n)}=a_{ik}+a_{ik}^{(2)}+\ldots+a_{ik}^{(n)}$, где $a_{ik}^{(n)}$ — элементы матрицы $M^n=M\cdot M\ldots M$. Из условия б) вытекает, что $|a_{ik}^{(n)}|\leqslant l^n$ и $|s_{ik}^{(n)}|\leqslant l+l^2+\ldots+l^n<l/(1-l)$, т. е. все матрицы

S_n имеют общую мажоранту столбцов из пространства A_1. Из условий, а) и б) вытекает, что $|a_{ik}^{(n)}| \leqslant nl^{n-l}\, Nq^k$ при $k > i$ и $|s_{ik}^{(n)}| \leqslant Nq^k \sum_{n=1}^{\infty} nl^{n-1} = q^k N \cdot L$; таким образом, условие 2) леммы 2 тоже будет выполняться. Наконец, существуют пределы $\lim_{n\to\infty} s_{ik}^{(n)} = s_{ik}$, где $s_{ik} = a_{ik} + a_{ik}^{(2)} + \ldots$, ибо $|s_{ik}^{(n)} - s_{ik}| \leqslant l^{n+1}(1-l)^{-1}$.

На основании леммы 2 последовательность матриц S_n, преобразующих A_1 в себя, сходится к матрице $S(s_{ik})$, что записываем таким образом: $S = M + M^2 + \ldots + M^n + \ldots$

Далее справедливо равенство

$$(E + S_n)(E - M) = E - M^{n+1} = (E - M)(E + S_n).$$

На основании леммы 1 крайние члены равенства стремятся, соответственно, к матрицам $(E + S)(E - M)$ и $(E - M)(E + S)$. Средние же члены равенства стремятся, как легко видеть, на основании леммы 2, к единичной матрице. Следовательно, матрица $E + S = E + M + M^2 + \ldots$ является обратной к матрице $E - M$ и преобразует пространство A_1 в себя.

Легко показать, что условие б) теоремы не необходимо для того, чтобы матрица $E - M$ имела обратную; но, с другой стороны, оно не может быть заменено более слабым условием $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}| < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}| < 1$.

Следствие 1. Если матрица теоремы 1 нижняя (верхняя) треугольная, то для существования обратной к матрице $E - M$ достаточно выполнения только одного из условий б), касающегося сумм абсолютных величин элементов столбцов (строк).

Следствие 2. Если матрица $M(a_{ik})$ удовлетворяет условиям:

$$|a_{ik}| \leqslant Nq^k \quad \text{при} \quad k > i, \quad 0 < q < 1, \quad N \text{ — любое}, \tag{2}$$

и ее строки и столбцы имеют мажоранту из пространства l_1, то матрицы $E - R_n$ имеют обратную для всех n, начиная с некоторого (матрица R_n получена из M заменой нулями элементов первых n строк и столбцов).

Следствие 3. Если матрица M преобразует пространство A_R в $\overline{A}_R$ [1, 2], то матрица $E - B_n$ имеет обратную для всех n, начиная с некоторого (матрица B_n получена из M заменой нулями элементов, стоящих одновременно в первых n строках и столбцах).

Из теоремы 1 легко получается

Теорема 2. *Пусть матрица $M(a_{ik})$ удовлетворяет условиям:*

$$|a_{ik}| \leqslant Nq^k, \ k > i, \ 0 < q < 1, \ \text{и} \ \sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}| \leqslant L, \ \sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}| \leqslant L; \tag{3}$$

тогда все значения λ из круга $|\lambda| < 1/L$ регулярны и $(E - \lambda M)^{-1} = E + \lambda M + \lambda^2 M^2 + \ldots$

В частности, к матрицам класса, выделенного в теореме 2, относятся матрицы, преобразующие пространство A_1 в $\overline{A}_1$, а также матрицы, удовлетворяющие условиям (2).

Теорема 3. *Спектр матрицы M, удовлетворяющей условиям (2), состоит не более чем из счетного множества значений, не имеющих предельной точки на конечном расстоянии, причем все точки спектра являются собственными значениями матрицы.*

Доказательство. В пространстве A_1 рассмотрим матричное уравнение

$$(E - \lambda M)\, x = y, \quad y \in A_1. \tag{4}$$

Матрицу M представим в виде суммы четырех матриц: $M = M_n +$

$+P_n+Q_n+R_n$, где M_n получена из M заменой нулями элементов строк и столбцов, начиная с $(n+1)$-го номера; P_n получена из M заменой нулями элементов первых n столбцов и элементов строк, начиная с $(n+1)$-й; Q_n получена из M заменой нулями элементов первых n строк и элементов столбцов, начиная с $(n+1)$-го; R_n определена выше (следствие 2 теоремы 1).

Рассмотрим уравнение (4) для значений λ из круга $|\lambda|<\rho$, где ρ — произвольное фиксированное число. На основании следствия 2 теоремы 1 существует такое число $n_0=n_0(\rho)$, что при $n \geqslant n_0$ матрицы $E-\lambda R_n$ имеют обратную, преобразующую пространство A_1 в себя. Представим ее таким образом: $(E-\lambda R_n)^{-1}=E+\lambda R_\lambda^{(n)}$. Зафиксируем n, $n \geqslant n_0$. Существование обратной $(E-\lambda R_n)^{-1}$ позволяет, отделив первые n уравнений системы, представляющей матричное уравнение (4), выразить из остальных уравнений неизвестное x через его первые n координат; подставив затем эти выражения x в n отделенных уравнений, получим матричное уравнение, в котором фигурируют только первые n координат точки x:

$$C_n(\lambda)\,x=D_n(\lambda)\,y, \tag{5}$$

где

$$C_n(\lambda)=E_n-\lambda M_n-\lambda^2 P_n\left(E+\lambda R_\lambda^{(n)}\right)Q_n \tag{6}$$

матрица, все элементы которой из строк и столбцов, начиная с $(n+1)$-го номера, равны нулю, и

$$D_n(\lambda)=E_n+\lambda P_n\left(E+\lambda R_\lambda^{(n)}\right)$$

матрица, все строки которой, начиная с $(n+1)$-й, состоят из нулей.

Таким образом, всякое решение x уравнения (4) является также решением уравнения (5). Справедливо также и в некотором роде обратное предложение, что всякое решение $x_0 \in A_1$ уравнения (5) порождает по формуле $x=(E+\lambda R_\lambda^{(n)})\,[(E-E_n)\,y+(E_n+\lambda Q_n)\,x_0]$ решение уравнения (4).

Отсюда следует, что если λ, $|\lambda|<\rho$, не является нулем определителя $|C_n(\lambda)|_n$ матрицы $C_n(\lambda)$, рассматриваемой как конечная порядка n, то система (4) имеет для любого $y \in A_1$ единственное решение $x \in A_1$ и, следовательно [3], матрица $E-\lambda M$ имеет обратную

$$(E-\lambda M)^{-1}=(E+\lambda R_\lambda^{(n)})\,[(E-E_n)+(E_n+\lambda Q_n)\,\overset{*}{C}_n D_n],$$

преобразующую пространство A_1 в себя ($\overset{*}{C}_n$ — матрица, обратная к $C_n(\lambda)$, рассматриваемой как конечная порядка n, дополненная нулями до бесконечной). Все же нули определителя $|C_n(\lambda)|_n$ являются точками спектра матрицы M и притом ее собственными значениями.

Рассматривая выражение (6) матрицы $C_n(\lambda)$, замечаем, что все элементы матрицы — аналитические функции от λ в круге $|\lambda|<\rho$, ибо таковыми являются элементы матрицы $\lambda R_\lambda^{(n)}$. Отсюда следует, что конечный определитель $|C_n(\lambda)|_n$ — аналитическая функция от λ в круге $|\lambda|<\rho$, а потому в любом замкнутом круге $|\lambda| \leqslant r_0$, $r_0<\rho$, имеет конечное число нулей — точек спектра матрицы M. Но ρ было выбрано произвольно; следовательно, в любом замкнутом круге будет конечное число точек спектра матрицы M.

Следствие. Теорема 3 справедлива также для матриц $M(a_{ik})$, удовлетворяющих условиям:

$$|a_{ik}| \leqslant Nq^k R^{k-i} \text{ при } k>i,\ 0<q<1, \text{ и } |a_{ik}| \leqslant b_i R^{k-i},\ |a_{ik}| \leqslant c_k R^{k-i}, \tag{7}$$

где $b(b_i)$ и $c(c_k)$ — точки пространства l_1. В частности, спектр указанного характера имеют матрицы M, преобразующие пространства A_R в $\overline{A}_R$, а также пространства A_R в A_{R_1}, $R_1 > R$, ибо условие (7) для них выполняется ([2]).

Здесь следует отметить, что если матрица M преобразует пространство A_R в некоторую свою часть G, то спектр матрицы M, рассматриваемой как оператор в пространстве A_R, совпадает со спектром матрицы M, рассматриваемой как оператор во множестве $\widetilde{G}$, где $\widetilde{G}$ — любое множество, принадлежащее A_R и содержащее G.

Рассмотрим теперь последовательность функций

$$f_n(z) - \lambda\varphi_n(z), \tag{8}$$

где

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^k,$$

$$\varphi_n(z) = \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} m_{1\alpha} a_{\alpha n}\right) + \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} m_{2\alpha} a_{\alpha n}\right) z + \ldots + \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} m_{k\alpha} a_{\alpha n}\right) z^{k-1} + \ldots$$

Для приложения рассмотренных результатов к получению полных систем и базисов в пространстве A_R можно воспользоваться следующим критерием. Если матрица $M(m_{ik})$ преобразует некоторое пространство A_{R_1} в A_R и имеет обратную матрицу, преобразующую пространство A_R в A_{R_1}, то последовательность (8) является полной системой, базисом или квазистепенным ([3]) базисом в пространстве A_R, смотря по тому, является полной системой, базисом или квазистепенным базисом в пространстве A_{R_1} последовательность функций $f_n(z)$. Тогда каждая из рассмотренных теорем и следствия из них дают соответственные предложения для полных систем и базисов.

Например, теорема 3 доставляет следующее утверждение.

Последовательность (8), *где матрица* $M(m_{ik})$ *удовлетворяет условиям* (2), *является полной системой, базисом или квазистепенным базисом в* A_1 *для всех* λ, *кроме, быть может, счетного множества значений* λ, *не имеющих предельной точки на конечном расстоянии, смотря по тому, является полной системой, базисом или квазистепенным базисом в* A_1 *последовательность* $\{f_n(z)\}$.

В заключение заметим, что среди матриц, преобразующих в себя аналитическое пространство A_R, существуют также матрицы, имеющие непрерывный спектр, причем характер спектра таких матриц может иметь особенности, не имеющие места для спектра матриц, преобразующих банаховские пространства в себя. К таким особенностям относятся, например, замкнутость множества регулярных значений, изолированность регулярных значений, несчетность множества собственных значений. Например, спектром матрицы $M(m_{ik})$ вида

$$m_{ik} = \begin{cases} a_{i-k}, & k \leqslant i; \\ 0, & k > i, \end{cases}$$

где функция $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ аналитическая в круге $|z| < R$ ($\varphi(z) \not\equiv \text{const}$), является область D-образ круга $|z| < R$ при преобразовании $1/\varphi(z)$; замкнутое же дополнение области D относительно расширенной плоскости является множеством регулярных значений рассматриваемой матрицы.

Поступило
25 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Хапланов, ДАН, **79**, № 6 (1951). [2] М. Г. Хапланов, ДАН, **80**, № 1 (1951). [3] М. Г. Хапланов, ДАН, **80**, № 2 (1951). [4] М. Г. Хапланов, ДАН, **90**, № 6 (1953). [5] G. Köthe, O. Toeplitz, J. f. reine u. angew. Math., **171**, 193 (1934).