Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

ГИДРАВЛИКА

В. М. ШЕСТАКОВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ВНУТРЕННЕЙ КИНЕМАТИКИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА И ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Терениным 17 VI 1953)

В теории неустановившейся фильтрации большое значение играет уравнение Буссинеска, которое в условиях плоской задачи, однородного грунта, отсутствия инфильтрации и испарения и при горизонтальном водоупоре запишется так [1]:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Kh \ \frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

где h — напор на свободной поверхности (глубина потока); K — коэффициент фильтрации; μ —активная пористость.

Уравнение (1) выведено в предположении, что горизонтальные скорости фильтрации постоянны по вертикали, что строго соответствует, как показала П. Я. Полубаринова-Кочина [2], изменению вертикальных скоростей вдоль вертикали по линейному закону. Это предположение до сего времени рассматривалось как постулат и не имело какого-либо фактического обоснования.

§ 1. Экспериментальные исследования внутренней кинематики неустановившегося грунтового потока. Нами были поставлены экспериментальные исследования, имевшие целью проверку изложенного постулата и выяснение внутренней кинематической картины в условиях неустановившегося движения. Исследования производились в щелевом лотке методом «взвешенных поплавков». Метод заключается в том, что из материала, имеющего плотность, примерно равную плотности рабочей жидкости, изготовляются маленькие частицы, поперечный размер которых должен быть меньше ширины щели. Эти частицы плавают в глицерине во взвешенном состоянии и, как показывает опыт, являются весьма чувствительными к малейшему движению глицерина в щели. В качестве материала поплавков нами применялась фото-бумага и некоторые сорта резины.

Для построения эпюр скоростей по вертикали при начальном горизонтальном положении кривой депрессии на исследуемой вертикали устанавливалось некоторое число «взвешенных поплавков», распределенных по высоте обычно равномерно. В определенные моменты времени, прошедшего от начала движения, фиксировалось положение всех поплавков. Отрезки, проходимые поплавками, и представляли собой в некотором масштабе величины скоростей.

Нами было проведено около 50 опытов, причем примерно 10% из них пришлось забраковать. Такой процент брака при настоящем состоянии методики следует считать закономерным.

Опыты проводились для следующих случаев:

Сплошная щель (соответствует перемычке на непроницаемом основании или массиву с полной врезкой реки) в условиях подпора и спада. Граничные условия: изменение уровня происходило на границе A, на границе $Б$ уровень поддерживался постоянным.

Щель с вырезом — типы I и II (соответствуют перемычке на проницаемом основании или массиву с неполной врезкой реки) в условиях спада. В этом случае граница $Б$ была непроницаемой.

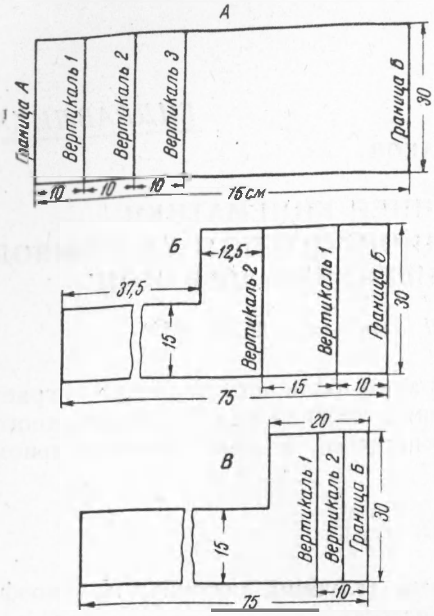

Рис. 1. A — сплошная шель; $Б$ — щель с вырезом, тип I; B — щель с вырезом, тип II

Во всех случаях скорость подпора или спада была порядка 0,1 см/сек при проницаемости (коэффициенте фильтрации) щели порядка 0,5—1 см/сек.

Построение эпюр скоростей производилось на ряде вертикалей, расположение которых показано на рис. 1.

На рис. 2 и 3 показаны типовые эпюры скоростей для этих случаев, построенные по следующему принципу: горизонтальные, скорости (u) откладывались в долях от средней по вертикали горизонтальной скорости ($u_{\text{ср}}$), а вертикальные скорости (v) — в долях от вертикальной скорости на свободной поверхности.

Несколько неожиданно выглядит эпюра вертикальных скоростей в условиях подпора, когда максимум вертикальной скорости оказался не на свободной поверхности, а на некоторой глубине от нее. Это, на первый взгляд, странное явление может быть объяснено тем, что в условиях подпора создается своеобразная картина движения, когда нижележащие слои воды, стремясь насытить область с большей скоростью подпора, могут обогнать в своем движении вышележащие слои.

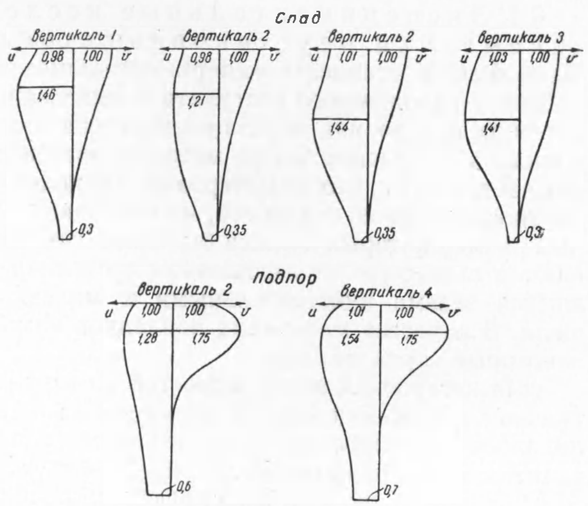

Рис. 2. Эпюры скоростей в потоке. Модель «сплошная щель»

Перейдем теперь к основным выводам по экспериментальному исследованию внутренней кинематики потока. Таких выводов можно сделать два, причем оба они естественно вытекают из рассмотрения эпюр.

1. Допущение о постоянстве горизонтальных скоростей по вертикали в данных условиях явно не соответствует действительности (в проведенных экспериментах отношение максимальной скорости к минимальной на одной вертикали меняется примерно от 2 до 5).

2. Горизонтальная скорость на кривой депрессии

с точностью до погрешности эксперимента равна средней по вертикали горизонтальной скорости. Эта закономерность четко проявляется во всех без исключения случаях, даже при таких резко деформированных эпюрах скоростей, какие получаются, например, в щелях с вырезом.

Последний вывод сходен с известным положением речной гидравлики, согласно которому в открытых руслах соотношение между скоростями — средней по вертикали и поверхностной — изменяется в сравнительно малых пределах. Как правило $u_{\text{ср}}/u_{\text{пов}} = 0{,}8$—$0{,}95$, причем чем спокойнее течение, тем ближе это соотношение к единице. Конечно, такая зависимость не может быть абсолютной и при определенных условиях (большее отношение мощности потока к его длине, более сложные граничные условия и т. п.) должна нарушаться. Однако для широкого круга гидротехнических и гидрогеологических условий можно с уверенностью гарантировать справедливость изложенных выводов.

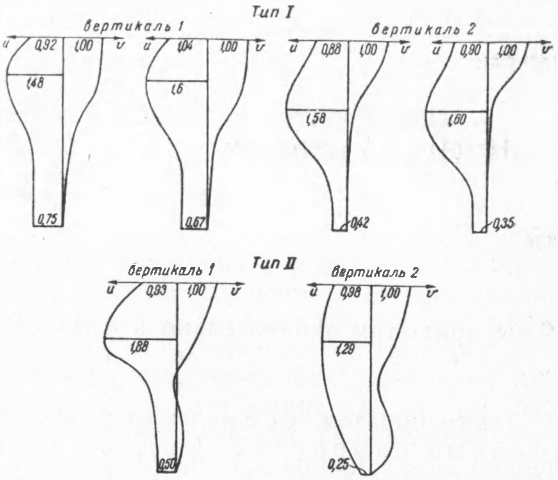

Рис. 3. Эпюры скоростей в потоке. Модель «щель с вырезом». Спад

§ 2. **Вывод уравнения неустановившейся фильтрации.** На основании полученных экспериментальных данных попытаемся дать вывод уравнения движения. Для простоты выкладок рассмотрим случай, когда нет никаких внешних поступлений или оттоков воды (отсутствие инфильтрации, испарения, поступления из нижележащих напорных горизонтов и т. п.) и при горизонтальном водоупоре, ибо принцип вывода во всех случаях остается одинаковым.

Запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy.$$

На свободной поверхности

$$v_h = -\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\, dy. \tag{1}$$

Согласно правилу дифференцирования под знаком определенного интеграла, можно получить равенство

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\, dy - u_h \frac{\partial h}{\partial x}; \tag{2}$$

u_h и v_h — значения горизонтальных и вертикальных скоростей на свободной поверхности. Так как, согласно экспериментам, $u_{\text{ср}} = u_h$, то

$$\int_0^h u\, dy = u_h h. \tag{3}$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая (3), получаем

$$v_h = -\frac{\partial}{\partial x}(u_h h) + u_h \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{4}$$

Обратимся теперь к рассмотрению условия на свободной поверхности, где должно быть ([2])

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt}. \tag{5}$$

Учитывая, что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{v_h}{\mu}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{u_h}{\mu},$$

имеем

$$v_h = \mu \frac{\partial h}{\partial t} + u_h \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{6}$$

Из (4) и (6) получаем

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u_h h). \tag{7}$$

Но

$$u_h = -K\frac{\partial h}{\partial x},$$

и мы приходим окончательно к уравнению движения

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial h}{\partial x}\right). \tag{8}$$

Таким образом, *если имеет место равенство горизонтальных скоростей средней по вертикали и на свободной поверхности, то оказывается справедливым уравнение Буссинеска.*

Интересно рассмотреть случай, когда это допущение в точности не выполняется, т. е. когда

$$u_{\text{ср}} = \beta u_h, \tag{9}$$

где β — некоторый коэффициент, в общем случае зависящий от x и t.

Тогда формула (3) преобразуется так:

$$\int_0^h u\,dy = \beta u_h h. \tag{10}$$

Соответственно изменится уравнение (4):

$$v_h = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta h \frac{\partial u_h}{\partial x}\right) + u_h \frac{\partial h}{\partial x},$$

и, как легко убедиться, дальнейшие преобразования приведут нас к уравнению

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta K h \frac{\partial h}{\partial x}\right). \tag{11}$$

Уравнение (11) обобщает уравнение Буссинеска на любые кинематические условия и потому может быть названо *обобщенным уравнением Буссинеска.*

Нетрудно убедиться, что изменения коэффициента β мало влияют на результаты расчета. Если, кроме того, учесть, что β входит в уравнение простым сомножителем с величиной коэффициента фильтрации, то можно сделать вывод, что *уравнение Буссинеска с достаточной для практики точностью может описать весьма широкую область расчетных случаев.*

Поступило
30 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, 1877. [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. матем. и мех., **13**, № 2, 187 (1949).