Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Л. ХЕЙН

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК ЖИДКОСТИ И ГАЗА К ЗАБОЮ ПЕРФОРИРОВАННОЙ СКВАЖИНЫ ПРИ ПОСТОЯННОМ ОТБОРЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 VI 1953)

Пусть скважина с перфорированной колонной вскрывает на полную мощность h горизонтальный, изотропный, однородный по мощности, ограниченный непроницаемыми кровлей и подошвой бесконечный пласт. Предполагается, что перфорации имеют форму круглых отверстий радиуса r_0 и расположены на нескольких симметричных по отношению к оси скважины вертикальных образующих цилиндрической части колонны. Пласт заполнен однородным флюидом (нефть, вода или газ) с начальной плотностью $\rho_н$. Требуется найти связь между дебитом и давлением на забое скважины и распределение давления в пласте при неустановившейся фильтрации флюида по закону Дарси и постоянном массовом отборе флюида из скважины.

Возьмем цилиндрическую систему координат (r, z, φ). Направим ось z по оси скважины. За положительное направление оси z примем направление от кровли к подошве. Начало координат на кровле пласта. Угол φ отсчитываем от одной из образующих с отверстиями, которую назовем начальной.

Пусть число образующих с отверстиями s, расстояние между отверстиями a. Ввиду малости этого расстояния по сравнению с длиной интервала перфорации можно положить, что концы интервала перфорации отстоят от кровли и подошвы на расстояние $a/2$.

При рассматриваемой схеме расположения перфорационных отверстий пласт состоит из отдельных гидродинамически тождественных частей, ограничиваемых проходящими между центрами отверстий и перпендикулярными оси скважины плоскостями. Таким образом, задача о распределении давления в пласте сводится к задаче о распределении давления в одной из его частей. Для определенности рассматриваем часть, ограничиваемую кровлей пласта.

§ 1. Случай фильтрации капельно-сжимаемой жидкости. Положим, что жидкость подчиняется закону Гука; тогда

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{p - p_0}{K_ж}\right), \tag{1}$$

где ρ — плотность, p — давление, $K_ж$ — модуль упругости жидкости. Общее дифференциальное уравнение фильтрации для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь $\varkappa = \frac{kK_ж}{m\mu}$ — коэффициент пьезопроводности, k — проницаемость, m — пористость, μ — динамическая вязкость жидкости.

Для решения поставленной задачи пользуемся методом стоков. Как известно, распределение плотности, вызываемое действием точечного стока с постоянной интенсивностью в неограниченной пористой среде, описывается уравнением:

$$\rho = \frac{g}{4(\pi\varkappa)^{3/2}} \int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{R^2\tau^2}{4\varkappa}\right) d\tau, \tag{3}$$

где R — расстояние от гидростока до данной точки среды. Следуя Маскету ([1]), расчетную схему получаем заменой пласта неограниченной пористой средой, а скважины — системой стоков, располагаемых по образующим бесконечно длинного цилиндра. Расположение стоков тождественно расположению перфорационных отверстий. При этом получается бесконечная последовательность горизонтальных секций мощности a, которые, подобно частям реального пласта, гидродинамически тождественны друг другу. Расположим систему координат таким же образом, как в реальной системе, и найдем связь между давлением и дебитом и распределение плотности в секции, ограничиваемой плоскостью $z = 0$. Пусть λ — координата произвольного гидростока; тогда значения λ составят последовательность, описываемую формулой

$$\lambda_n = {}^1/_2\, a + na, \tag{4}$$

где n принимает целые значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. При этом каждому гидростоку соответствует определенное значение n и номер q образующей, на которой он находится. Расстояние от гидростока с координатами λ, r_c, φ_q до точки секции с координатами r, z, φ обозначим через $R_{n,q}$; тогда

$$R^2_{n,q} = r^2 + r_c^2 - 2rr_c\cos(\varphi - q2\pi/s) + (z - \lambda_n)^2. \tag{5}$$

Согласно (3), (4) и (5)

$$\Delta\rho = \frac{1}{4(\pi\varkappa)^{3/2}} \times \tag{6}$$

$$\times \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left[-\tau^2 \frac{r^2 + r_c^2 - 2rr_c\cos\left(\varphi - q\frac{2\pi}{s}\right) + \left(z - \frac{a}{2} + na\right)^2}{4\varkappa}\right] d\tau,$$

где $\Delta\rho$ — изменение плотности в точке среды, вызванное действием всей бесконечной системы гидростоков.

Обозначая $r^2 + r_c^2 - 2rr_c\cos(\varphi - q\cdot 2\pi/s)$ через R^2_φ, меняя в (6) порядок интегрирования по τ и суммирования по n, можно привести (6) к следующему виду:

$$\Delta\rho = \frac{g}{2\pi\varkappa a} \sum_{q=0}^{s-1} \int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{R_q\tau^2}{4\varkappa}\right)\frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ \frac{g}{\pi\varkappa a} \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2n\pi}{a}\left(z - \frac{a}{2}\right) \int\limits_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left[-\frac{R_q^2\tau^2}{4\varkappa} - \frac{(2n\pi)^2\varkappa}{a^2\tau^2}\right]\frac{d\tau}{\tau}. \tag{7}$$

Произведя в (7) замену переменных, положив в первом интеграле $R_q^2\tau^2/4\varkappa = u$ и во втором интеграле $R_q^2\tau^2/2\varkappa = y$ и пользуясь известным в теории цилиндрических функций соотношением $K_0(z) = = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{z^2}{y}\right)\right]\frac{dy}{y}$, получаем после простых преобразований:

$$\Delta\rho = \sum_{q=0}^{s-1} \frac{g}{4\pi\varkappa a}\left\{-\mathrm{Ei}\left(-\frac{R_q^2}{4\varkappa t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{a}\left(z-\frac{a}{2}\right)4K_0\left(2\,n\pi\,\frac{R_q}{a}\right) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\,n\pi}{a}\left(z-\frac{a}{2}\right)\int\limits_0^{R_q^2/2\varkappa t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y+\frac{4n^2\pi^2R_q^2}{a^2y}\right)\frac{dy}{y}\right]\right\}, \qquad (8)$$

где Ei — интегральный экспоненциал, K_0 — функция Бесселя от чисто мнимого аргумента второго рода нулевого порядка.

Связи между дебитом и плотностью на забое перфорированной скважины отвечает связь между дебитом и плотностью в точке нахождения произвольного стока нашей модели, поскольку все стоки равноправны.

Зададимся стоком с координатами $z = a/2$, $r = r_c$, $\varphi = 0$. Однако для определения плотности в точке нахождения этого стока нельзя воспользоваться непосредственно уравнением (8), поскольку оно непригодно для определения плотности в точках, лежащих на образующих. Но так как в основе принятой расчетной модели лежит предположение о сферическом притоке к отверстию, то в качестве представляющей забой поверхности можно принять поверхность полусферы радиуса r_0, где r_0 — радиус перфорационного отверстия. При этом величину изменения давления на «забое» можно разложить на два слагаемых.

Первое слагаемое — изменение плотности, вызванное стоками, лежащими на той же образующей, на которой лежит рассматриваемый сток. Величина этого слагаемого соответствует члену суммы в (8) с индексом $q = 0$, если в нем положить $z = a/2$, $\varphi = 0$, $r = r_c + r_0$.

Второе слагаемое — изменение плотности, вызванное стоками, лежащими на остальных образующих. Величина его определяется остальными членами суммы в (8), если в них положить $z = a/2$, $\varphi = 0$, $r = r_c$. Можно показать, что $g = G/lm$, где G — дебит скважины, причем при дренировании пласта G отрицательно; l — общее число перфорационных отверстий.

Учитывая все вышеизложенное и (1), после простых преобразований получим из (8)

$$p_c = p_н - \frac{Q\mu_0}{4\pi skh}\left\{-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_0^2}{4\varkappa t}\right) - \sum_{q=1}^{s-1}\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_c^2\sin^2 q\frac{\pi}{s}}{\varkappa t}\right) + \right.$$

$$\left. + 4\gamma(x_0) - 2\psi(x_0;\ \alpha_0) + \sum_{q=1}^{s-1}\left[4\gamma(x_c) - 2\psi(x_c;\ \alpha_c)\right]\right\}. \qquad (9)$$

Здесь: $x_c = 4\frac{r_c}{a}\sin q\frac{\pi}{s}$, $x_0 = 2\frac{r_0}{a}$, $\alpha_c = \frac{2r_c^2\sin^2 q\,\pi/s}{\varkappa t}$, $\alpha_0 = \frac{r_0^2}{2\varkappa t}$, $\gamma(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}K_0(n\pi x)$, $\psi(x,\ \alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\alpha}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y + \frac{n^2\pi^2x^2}{y}\right)\right]\frac{dy}{y}$, p_c — давление на забое, $p_н$ — начальное давление, Q_0 — объемный дебит.

Функции $\psi(x,\ \alpha)$ и $\gamma(x)$ нами протабулированы в интервале практически встречающихся значений переменных. При обычной перфорации обсадных колонн можно считать, что отверстия расположены двумя диаметрально противоположными вертикальными рядами. Полагая в (9) $s=2$, получаем простую расчетную формулу для определения изменения давления на забое перфорированной скважины.

§ 2. Случай фильтрации газа. Аппроксимируя уравнение состояния совершенного газа уравнением

$$\rho = \rho_н \exp\left(-\frac{p_н - p}{\beta}\right), \tag{10}$$

И. А. Чарный [2] линеаризует дифференциальное уравнение Лейбензона для изотермической фильтрации газа, приводя его к виду

$$\bar{\varkappa}\nabla^2 P = \partial P/\partial t, \tag{11}$$

где P — функция Лейбензона; $\bar{\varkappa} = k\beta/m\mu$; $\beta = (p_н - p_к)/\ln\frac{p_н}{p_к}$; $p_н$ и $p_к$ — значения давлений в начале и конце интервала линеаризации.

Так как (11) и (2) совпадают по форме, то заменяя в (8) ρ на P и $\varkappa$ на $\bar{\varkappa}$ и повторяя ход рассуждений предыдущего параграфа, учитывая при этом, что, согласно (10) и выражению для P, имеем $P_с = \rho_н\beta\exp\left(-\frac{p_н}{\beta}\right)\left[\exp\left(\frac{p_с}{\beta}\right) - 1\right]$, $P_н = \rho_н\beta\exp\left(-\frac{p_н}{\beta}\right)\left[\exp\left(\frac{p_н}{\beta}\right) - 1\right]$, и $G/\rho_н = Q_0 p_0/p_н$, получим, пользуясь принятыми там обозначениями, следующую окончательную формулу для $p_с$ при $s=2$:

$$p_с = p_н + \beta\ln\left\{1 - \frac{Q_0 p_0 \mu}{4l\beta p_н ka}\left\{-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_с^2}{\bar{\varkappa}t}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{r_0^2}{\bar{\varkappa}t}\right) + 4\left[\gamma(x_с) + \gamma(x_0)\right] - 2\left[\psi(x_с, \alpha_с) + \psi(x_0, \alpha_0)\right]\right\}\right\}. \tag{12}$$

Формулы (9) и (12) могут быть использованы для определения проницаемости и пьезопроводности пласта по данным испытания скважин.

Как известно, в призабойной зоне газовых скважин линейный закон фильтрации часто нарушается. В нашей заметке [3] указывалось, что в этом случае для определения проницаемости или пьезопроводности по данным промысловых испытаний скважин теоретические кривые падения давления на забое скважины следует сопоставлять с опытной кривой по принципу совпадения периода стабилизации.

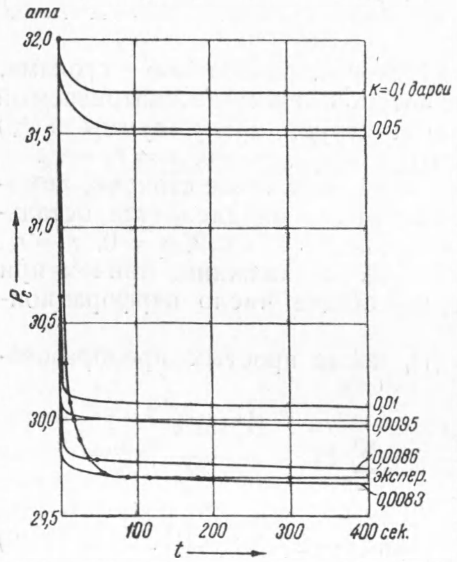

Рис. 1. Опытная и теоретические кривые падения давления на забое газовой скважины при $Q = 240{,}8$ тыс. м³/сутки = const

На рис. 1 приводятся построенные на основе формулы (12) теоретические кривые и опытная кривая падения давления на забое газовой скважины, испытывавшейся при нарушении линейного режима фильтрации газа в призабойной зоне пласта. Теоретическая кривая, отвечающая опытному значению периода относительной стабилизации, соответствует проницаемости в 0,1 дарси.

Всесоюзный научно-исследовательский институт природных газов

Поступило 24 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Maskat, Trans. Am. Inst. Min. Met. Eng., **151** (1943). [2] И. А. Чарный, Изв. АН СССР, ОТН, № 6 (1951). [3] А. Л. Хейн, ДАН, **91**, № 3 (1953).