

Д. Ф. ХАРАЗОВ

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
С СИММЕТРИЗУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VI 1953)

1. Пусть X — некоторое гильбертово пространство. Рассмотрим уравнение

$$(E - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2) x = y, \quad (1)$$

где A_1 и A_2 — операторы с конечной абсолютной нормой, отображающие X в себя, E — тождественный оператор, а λ — комплексный параметр. Допустим далее, что существует такой строго положительный, самосопряженный оператор H с конечной абсолютной нормой, отображающий X в себя, для которого операторы $P_1 = HA_1$ и $P_2 = HA_2$ оказываются самосопряженными. Считаем также, что оператор A_2 имеет только положительные собственные значения. Тогда уравнение

$$(E - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2) x = 0 \quad (1')$$

может иметь только вещественные собственные значения. Кроме того, если λ_1 и λ_2 — два неравных собственных значения уравнения (1'), а x_1 и x_2 — соответствующие им собственные элементы, то выполняется условие

$$(Hx_1, x_2) + \lambda_1 \lambda_2 (P_2 x_1, x_2) = 0.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — последовательность всех собственных значений уравнения (1'). В силу вышесказанного, обобщая соответственным образом способ ортогонализации, мы можем считать, что соответствующие собственные элементы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ удовлетворяют условиям

$$(Hx_i, x_k) + \lambda_i \lambda_k (P_2 x_i, x_k) = \delta_{i, k}. \quad (2)$$

2. Введем в рассмотрение матричные представления

$$A_s x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}^{(s)} x_i e_k, \quad a_{ik}^{(s)} = (A_s e_k, e_i), \quad s = 1, 2, \quad x_i = (x, e_i),$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — полная ортонормированная система собственных элементов H , и положим

$$A_{sp} x = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^p a_{ki}^{(s)} x_i e_k, \quad s = 1, 2, \quad H_p x = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\mu_k} x_k e_k,$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ — собственные значения H ($e_k = \mu_k H e_k$). Для любых элементов x и $y \in X$ имеют место соотношения

$$(H_p A_{sp} x, y) = (x, H_p A_{sp} y), \quad s = 1, 2.$$

Поэтому $P_{\cdot p} = H_p A_{s p}$, $s = 1, 2$, оказываются самосопряженными операторами. Более того, при любом $x \in X$ $A_{s p} x$ и $P_{s p} x$ сильно сходятся, соответственно, к $A_s x$ и $P_s x$, $s = 1, 2$. При любом p P_{2p} — положительный оператор. Пусть e_1, e_2, \dots, e_q — полная система собственных элементов P_{2p} . Построим вспомогательное метрическое пространство $G^{(p)}$, элементами которого являются упорядоченные пары $\alpha \equiv \{x, y\}$ элементов x, y из X с метрикой

$$\rho(\alpha, \alpha^*) = \sum_{k=1}^p |c_k - c_k^*| + \sum_{k=1}^q |d_k - d_k^*|,$$

где $c_k = (x, e_k)$, $c_k^* = (x^*, e_k)$ ($k = 1, \dots, p$), $d_k = (y, e_k)$, $d_k^* = (y^*, e_k)$ ($k = 1, \dots, q$), $\alpha^* \equiv \{x^*, y^*\}$, и рассмотрим в $G^{(p)}$ множество $G_1^{(p)}$ элементов $\alpha \equiv \{x, y\}$, удовлетворяющих условию

$$N_p(\alpha) = (H_p x, x) + (P_{2p} y, y) \leq 1.$$

$G_1^{(p)}$ — множество, компактное в себе. На множестве $G_1^{(p)}$ рассмотрим функционал вида

$$\Phi^{(p)}(\alpha) = (P_{1p} x, x) + (P_{2p} x, y) + (y, P_{2p} x).$$

$\Phi^{(p)}(\alpha)$, как функционал, непрерывный на $G_1^{(p)}$, достигает на $G_1^{(p)}$ наибольшего и наименьшего значений. Обозначим через $\Phi_1^{(p)}$ экстремальное значение $\Phi^{(p)}(\alpha)$, наибольшее по абсолютному значению, и допустим, что оно достигается на $\alpha_1 \equiv \{x_1, y_1\}$, $\Phi^{(p)}(\alpha_1) = \Phi_1^{(p)}$. Тогда $N_p(\alpha_1) = 1$. С помощью способа множителей Лагранжа убеждаемся в том, что $\lambda_1^{(p)} = \frac{1}{\Phi_1^{(p)}}$ — наименьшее по абсолютному значению собственное значение уравнения

$$(E - \lambda A_{1p} - \lambda^2 A_{2p}) x = 0. \quad (3)$$

Пусть s_p — число всех линейно независимых собственных элементов P_{1p} . Тогда уравнение (3) имеет не менее s_p собственных значений $|\lambda_1^{(p)}| \leq |\lambda_2^{(p)}| \leq \dots \leq |\lambda_{s_p}^{(p)}|$ с соответствующими собственными элементами $x_1^{(p)}, \dots, x_{s_p}^{(p)}$, удовлетворяющими условиям вида (2). Кроме того, имеет место

Теорема 1. Если $\alpha \equiv \{x, y\}$ удовлетворяет условиям

$$(H_p x_k^{(p)}, x) + \lambda_k^{(p)} (P_{2p} x_k^{(p)}, y) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

то

$$|\Phi^{(p)}(\alpha)| \leq \frac{N_p(\alpha)}{|\lambda_n^{(p)}|}.$$

Если A_1 не конечномерный оператор, то то же справедливо относительно P_1 , тогда для любого n найдется такое число $p(n)$, что $n < s_{p(n)} + 1$.

3. В дальнейшем считаем, что A_1 не конечномерный оператор. Допустим, что некоторая подпоследовательность $\{\lambda_n^{(pk)}\}$ последовательности n -х собственных значений уравнений вида (3) сходится, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_n^{(pk)} = \lambda_n$. Тогда λ_n — собственное значение уравнения (1'), а соответствующий ему собственный элемент x_n нормирован условием

$$(H x_n, x_n) + \lambda_n^2 (P_2 x_n, x_n) = 1.$$

На основании этого предложения легко видеть, что последовательность $\{\Phi_1^{(p)}\}$ ограничена. Любая выбранная из нее сходящаяся подпоследовательность $\{\Phi_1^{(p_k)}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_1^{(p_k)} = \Phi_1$, обладает тем свойством, что $\Phi_1 \neq 0$. Тогда, в силу вышесказанного, $\lambda_1 = \frac{1}{\Phi_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\Phi_1^{(p_k)}}$ есть собственное значение уравнения (1').

Используя экстремальные свойства собственных значений уравнения (3), убеждаемся в том, что имеет место

Теорема 2. Уравнение (1') имеет бесчисленное множество собственных значений $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, которым соответствуют собственные элементы, удовлетворяющие условиям (2).

На основании полученного нами ранее результата (1), $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$. Собственные значения λ_k и собственные элементы x_k уравнения (1') получаются как пределы некоторых последовательностей $\{\lambda_k^{(p_i)}\}$ и $\{x_k^{(p_i)}\}$ (сильный предел) ($k = 1, 2, \dots$).

4. Пусть f и g — произвольные элементы из X . Полагая

$$f_k^{(p_i)} = (H_{p_i} x_k^{(p_i)}, f), \quad g_k^{(p_i)} = \lambda_k^{(p_i)} (P_{2p_i} x_k^{(p_i)}, g), \quad \gamma_k^{(p_i)} = f_k^{(p_i)} + g_k^{(p_i)},$$

$$k = 1, \dots, n-1;$$

$$u_n^{(p_i)} = f - \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\gamma_k^{(p_i)}} x_k^{(p_i)}, \quad v_n^{(p_i)} = g - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(p_i)} \overline{\gamma_k^{(p_i)}} x_k^{(p_i)},$$

$$f_k = \lim_{i \rightarrow \infty} f_k^{(p_i)} = (H x_k, f), \quad g_k = \lim_{i \rightarrow \infty} g_k^{(p_i)} = \lambda_k (P_2 x_k, g),$$

$$\overline{\gamma}_k = \lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\gamma_k^{(p_i)}} = \overline{f_k + g_k}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

$$u_n = \lim_{i \rightarrow \infty} u_n^{(p_i)} = f - \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\gamma}_k x_k, \quad v_n = \lim_{i \rightarrow \infty} v_n^{(p_i)} = g - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \overline{\gamma}_k x_k,$$

$$\alpha \equiv \{u_n^{(p_i)}, v_n^{(p_i)}\},$$

видим, что $\alpha \equiv \{u_n^{(p_i)}, v_n^{(p_i)}\}$ удовлетворяет условиям (4) для $p = p_i$. Отсюда, в силу теоремы 1, $|\Phi^{(p_i)}(\alpha)| \leq N_{p_i}(\alpha) / |\lambda_n^{(p_i)}|$, или, так как

$$N_{p_i}(\alpha) = N_{p_i}(\alpha_0) - \sum_{k=1}^{n-1} |\overline{\gamma}_k^{(p_i)}|^2, \quad \alpha_0 \equiv \{f, g\}, \quad \text{имеем } |\Phi^{(p_i)}(\alpha)| \leq N_{p_i}(\alpha_0) / |\lambda_n^{(p_i)}|.$$

Тогда, вспоминая значения $\Phi^{(p_i)}(\alpha)$ и $N_{p_i}(\alpha_0)$ и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, получим

$$|(P_1 u_n, u_n) + (P_2 v_n, v_n) + (v_n, P_2 u_n)| \leq \{(Hf, f) + (P_2 g, g)\} / |\lambda_n|.$$

Отсюда, подставляя значения u_n и v_n и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(P_1 f - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f, H x_k)}{\lambda_k} H x_k, f \right) + \left(P_2 f - \sum_{k=1}^{n-1} (f, H x_k) P_2 x_k, g \right) + \right. \\ \left. + \left(P_2 g - \sum_{k=1}^{n-1} (g, P_2 x_k) H x_k, f \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k |(P_2 x_k, g)|^2 \right\} = 0.$$

В силу произвольности f и g с помощью этого равенства убеждаемся в справедливости предложений:

Теорема 3. При любом $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, Hx_k)}{\lambda_k} Hx_k$ слабо сходится к $P_1 f$.

Теорема 4. При любом $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, P_2 x_k) Hx_k$ слабо сходится к $P_2 f$.

Теорема 5. При любом $f \in X$ и произвольном значении λ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \{(f, Hx_k) / \lambda_k + \lambda (f, P_2 x_k)\} Hx_k$ слабо сходится к $(P_1 + \lambda P_2) f$.

С помощью теоремы 5 убеждаемся в том, что полученная нами последовательность собственных значений уравнения (1') исчерпывает все множество его собственных значений, а соответствующая им система собственных элементов, удовлетворяющих условиям (2), есть полная система собственных элементов. Отсюда легко вытекает, что все последовательности $\{\lambda_n^{(p)}\}$ сходятся целиком к λ_n ($n = 1, 2, \dots$), поэтому выделение сходящихся подпоследовательностей становится излишним.

На основании теоремы 5 доказывается также

Теорема 6. Если λ не есть собственное значение уравнения (1'), то для единственного решения x уравнения (1) при заданном $y \in X$ ряд $\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, Hx_k)}{\lambda_k - \lambda} Hx_k$ сходится слабо к $H(x - y)$.

5. Пусть теперь в X существует линейное подмножество L , для элементов x которого можно ввести вторую норму Банаха $\|x\|_B$ (топологически не эквивалентную норме Гильберта $\|x\|_H = \sqrt{(x, x)}$), с помощью которой L превращается в полное пространство L_B , причем $\|x\|_H \leq C \|x\|_B$, $x \in L$, C не зависит от x . (Например, в L_2 таким множеством будет множество всех непрерывных функций.) Тогда, если $A_2 = 0$, используя результат теоремы 3 и сходимости ряда (для любого $f \in X$) $\sum_{n=1}^{\infty} |(Hx_n, f)|^2 \leq (Hf, f)$, следуя методу М. Крейна⁽²⁾, докажем,

что если оператор A_1^* H -непрерывен⁽²⁾ и для любого $f \in X$ $A_1 f \in L$, $Hf \in L$, то для любого $f \in L$ ряд в теореме 3 сходится по норме Банаха к указанному в этой теореме пределу. Кроме того, для $y \in L$ при $A_2 = 0$ ряд в теореме 6 также сходится по норме Банаха.

6. Все рассуждения и результаты предыдущих параграфов справедливы для частного случая, когда $A_2 = 0$. Этот случай изучал ранее А. Заанен⁽³⁾ (для вполне непрерывных операторов A_1 и H). Идя по иному пути, он доказал для своего случая существование собственных значений, что же касается теорем о разложении по собственным элементам, им получены более слабые результаты.

7. Полученные результаты применяются к исследованию граничных задач для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными, с помощью сведения этих задач к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма с симметризуемыми ядрами.

Тбилисский математический институт им. А. Размадзе Академии наук Груз.ССР

Поступило 3 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. Ф. Харазов, Тр. Тбилисс. матем. ин-та, 19 (1953). ² М. Г. Крейн, Збірн. праць. Инст. мат. АН УРСР, № 9 (1948), ³ А. С. Заанен, Nieuw. Arch. v. Wisk., (2), 22 (1943).