Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. М. РОДНЯНСКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЯ

(*Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1953*)

Предварительные замечания. В этой заметке G есть ограниченная область ориентированного пространства R^n $(n \geqslant 2)$; $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$ — функции, определенные и непрерывные в $\overline{G}$; f — отображение замкнутой области $\overline{G}$ в R^n, осуществляемое функциями $f_1, \ldots, f_n$. Далее полагаем

$$G_g = \overline{G} - G.$$

Множество G_g называется границей области G.

Буква O (с тем или иным индексом или без него) обозначает произвольную фиксированную компоненту открытого множества $R^n - fG_g$. Через O^∞ обозначаем неограниченную компоненту множества $R^n - fG_g$. Далее считаем, согласно ([1]): $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Легко видеть, что если $y \in R^n - fG_g$, то f_y^{-1} есть компакт (в частности, быть может, пустое множество), лежащий в G. Поэтому определена степень $\gamma(f, y)$ отображения f в точке y ([2]).

Тем самым в $R^n - fG_g$ определена целочисленная функция $\gamma(f, y)$. В простейшем случае: $n = 2$, G есть внутренность простой замкнутой линии Γ, — функция $\gamma(f, y)$ есть число сбходов точки $f(x)$ вокруг точки y, когда точка x обежит линию Γ один раз против стрелки часов.

§ 1. Теорема 1. *Функция $\gamma(f, y)$ есть константа на каждой компоненте множества $R^n - fG_g$.*

Замечание 1. Если $y \overline{\in} f\overline{G}$, то $\gamma(f, y) = 0$.

Из теоремы 1 и замечания 1 следует:

Замечание 2. $\gamma(f, y) = 0$ для всех $y \in O^\infty$.

Определение 1. Полагаем

$$\gamma(f, O) = \gamma(f, y) \quad (y \in O).$$

В силу теоремы 1 наше определение не зависит от выбора точки $y \in O$.

Замечание 3. Если $O \overline{\subset} fG$, то $\gamma(f, O) = 0$.

В частности:

Замечание 4. $\gamma(f, O^\infty) = 0$.

§ 2. В этом параграфе предполагаем, что функции дифференцируемы в G и непрерывны в $\overline{G}$. Здесь и в дальнейшем через J обозначаем якобиан отображения f.

Теорема 2. *Функция $\gamma(f, y)$ обладает и вполне характеризуется следующими тремя свойствами:*

1) *$\gamma(f, y)$ определена в $R^n - fG_g$;*

2) *$\gamma(f, y)$ есть константа на каждой компоненте множества $R^n - fG_g$;*

3) *для всякого $y \in R^n - fG_g$ и такого, что полный прообраз $f^{-1}y$ не содержит нулей якобиана (из утверждения 5° работы* [3] *следует, что почти все точки из $R^n - fG_g$ обладают указанным свойством), имеем:*

$$\gamma(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}y} \operatorname{sign} J(x)$$

(легко видеть, что если $f^{-1}y$ не содержит нулей якобиана, то множество $f^{-1}y$ конечно или пусто).

§ 3. В этом параграфе предполагаем, что функции $f_1, \ldots, f_n$ непрерывно дифференцируемы в G и непрерывны в $\overline{G}$.

Теорема 3. *Если $J(x)$ есть функция, суммируемая на $f^{-1}O$, то*

$$\gamma(f, O) = \frac{1}{\operatorname{mes} O} \int\limits_{f^{-1}O} J(x)\, dx.$$

Замечание 5. Для суммируемости якобиана на $f^{-1}O$ достаточно потребовать, например, ограниченности частных производных функций $f_1, \ldots, f_n$ на $f^{-1}O$.

Теорема 4. *Если $J(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на $f^{-1}O$, то $J(x)$ есть функция, суммируемая на $f^{-1}O$.*

Из теорем 3, 4 следует:

Теорема 5. *Если $n = 2$, а отображение f есть функция комплексного переменного, аналитическая в G, непрерывная в $\overline{G}$, то для любой точки $w \in O$ имеем:*

$$\frac{1}{\operatorname{mes} O} \iint\limits_{f^{-1}O} |f'(z)|^2\, dx\, dy =$$

= сумме кратностей w — точек функции f, лежащих в G.

§ 4. В этом параграфе предполагаем, что функции $f_1, \ldots, f_n$ непрерывно дифференцируемы на некотором открытом множестве $U \supset \overline{G}$, $\operatorname{mes} G_g = 0$.

Теорема 6.

$$\int\limits_G J(x)\, dx = \sum_k \gamma(f, O_k) \cdot \operatorname{mes} O_k,$$

где суммирование распространяется на все компоненты множества $R^n - fG_g$.

Из теоремы 6 следует, например:

Теорема 7. *Если*

$$\int\limits_G J(x)\, dx \neq 0,$$

то fG_g разбивает пространство R^n.

Из теоремы 7 следует, например:

Теорема 8. *Если существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; λ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = \lambda \quad (x \in G_g),$$

то

$$\int\limits_G J(x)\,dx = 0.$$

Теорема 9. *Пусть $\varphi(y)$ есть функция, определенная и суммируемая на множестве fG. Тогда*:

$$\int\limits_G \varphi(f(x))\,J(x)\,dx = \sum_k \gamma(f, O_k)\cdot\int\limits_{O_k}\varphi(y)\,dy,$$

где суммирование в правой части последнего равенства распространяется на все компоненты множества $R^n - fG_g$.

Замечание 6. Теорема 9 представляет собой обобщение на случай не взаимно-однозначного отображения известной формулы о замене переменного в кратном интеграле:

$$\int\limits_G \varphi(f(x))\,J(x)dx = \int\limits_{fG}\varphi(y)\,dy.$$

Мы видим, что в то время как левая часть этой формулы в этом случае не меняется, правая часть приобретает совершенно другой вид.

Из теорем 3, 9 следует:

Теорема 10. *Если $\varphi(y)$ есть функция, определенная и суммируемая на множестве fG, то*

$$\int\limits_G \varphi(f(x))\,J(x)\,dx = \sum_k \frac{1}{\operatorname{mes} O_k}\int\limits_{f^{-1}O_k} J(x)\,dx\cdot\int\limits_{O_k}\varphi(y)\,dy,$$

где суммирование в правой части последнего равенства распространяется на все компоненты множества $R^n - fG_g$.

Московский химико-технологический
институт мясной промышленности

Поступило
12 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Сакс, Теория интеграла, 1949. [2] К. А. Ситников, Матем. сбор., 31 (73), № 2 (1952). [3] А. М. Роднянский, ДАН, 72, № 1 (1950).